

3) Démonstration du théorème:

les solutions des équations différentielles du type $y' = ay$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = K e^{ax}$, $K \in \mathbb{R}$

Etape 1 de la démonstration:

Si $y = K e^{ax}$ alors $y' = a K e^{ax}$
donc y est bien solution.
 $y' = ay$

Etape 2 de la démonstration:

Supposons qu'une fonction g est solution de l'équation $y' = ay$

• Posons $t(x) = g(x) e^{-ax}$

• Dérivons t
 $t'(x) = g'(x) e^{-ax} + g(x) (-a e^{-ax})$

$$t'(x) = g'(x) e^{-ax} - a g(x) e^{-ax}$$

$$t'(x) = (g'(x) - a g(x)) e^{-ax}$$

D'après la propriété de g qui vérifie $g'(x) = a g(x)$
 $g'(x) - a g(x) = 0$

on peut écrire: $t'(x) = (0) e^{-ax}$
 $t'(x) = 0$

Conclusion:

On a vu que $t'(x) = 0$ ce qui signifie que la fonction t est une fonction constante.

Posons $t(x) = K$ où K est un réel

Ainsi, puisqu'on a posé $t(x) = g(x) e^{-ax}$

alors $K = g(x) e^{-ax}$

$$\text{d'où } g(x) = K \times \frac{1}{e^{-ax}}$$

$$g(x) = K e^{ax}$$

Donc avec la seule supposition que g est solution de l'équation $y' = ay$ on aboutit à $g(x) = K e^{ax}$, $K \in \mathbb{R}$

Toutes les solutions de $y' = ay$ sont donc bien les fonctions $y = K e^{ax}$.