N°20074

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 2$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$\frac{9}{2}$

Valider ✔ Suivant ▶

Les données sont la norme de $\vec{u}$
la norme de $\vec{v}$
la norme de $\vec{u} - \vec{v}$

Donc on utilise la définition avec la norme

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

C'est vrai pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc c'est encore vrai si on remplace $\vec{v}$ par $-\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot -\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|-\vec{v}\|^2\right)$$

On sait que $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$ donc :

$$\vec{u} \cdot -\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Enfin on sait que $\vec{u} \cdot -\vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{v}$

Donc on a :

$$-\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

et en multipliant les deux membres par -1 on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(-\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$$

D'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(-(+2)^2 + 2^2 + 3^2\right) = \frac{1}{2}(-4 + 4 + 9) = \frac{9}{2}$