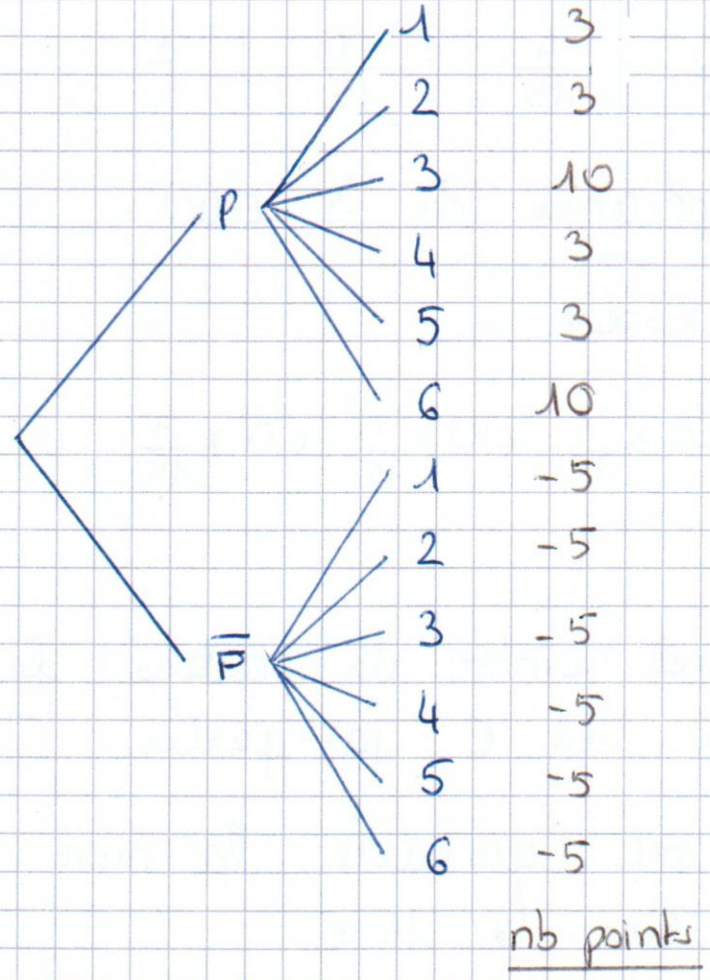
n° 58 p 330

58 Un jeu consiste à lancer simultanément une pièce équilibrée et un dé cubique équilibré. On gagne 10 points si on obtient « Pile » et un multiple de 3, on gagne 3 points si on obtient « Pile » mais pas de multiple de 3, on perd 5 points dans tous les autres cas.
On note X le nombre de points obtenus par le joueur à la fin d'une partie.
1. Interpréter l'évènement $\{X = -5\}$ dans le contexte de ce jeu.
2. Calculer $P(X \geqslant 4)$.
3. Déterminer la loi de probabilité de X.
4. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.
5. Déterminer l'écart type de X.

Soit P, l'évènement "obtenir pile"
Soit 1, l'évènement "obtenir 1 au dé"
(idem pour 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6)

Traduisons l'énoncé par un arbre pondéré :



la pièce et le dé sont équilibrés : chaque combinaison a une probabilité d'être obtenue égale à $\frac{1}{12}$.

1 - L'évènement $\{X = -5\}$ signifie que le joueur a perdu 5 points en fin de partie : il a donc obtenu "Face" au lancer de pièce.

2 - $P(X \geqslant 4) = P(X = 10)$
$P(X \geqslant 4) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

3. Selon l'arbre de probabilité

x_i	10	3	-5	total
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$	$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$	$\frac{12}{12}=1$

4. $E(X) = \sum_i x_i \times P(X=x_i)$

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} + (-5) \times \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \frac{1}{6}$$

En moyenne, au bout d'un très grand nombre de parties, le joueur gagne $\frac{1}{6}$ point par partie

5. $V(X) = \sum_i \left[x_i^2 \times P(X=x_i)\right] - \left[E(X)\right]^2$

$$V(X) = 10^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{3} + (-5)^2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{1157}{36}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1157}{36}}$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{1157}}{6} \qquad \sigma(X) \simeq 5,669$$