Problème guidé : n° 73 p 332

73 L'entreprise EKTR fabrique des casques audio. Dans sa production, 5 % d'entre eux ne sont pas conformes (ils ont un défaut). Le contrôle de production mis en place dans cette entreprise rejette 96 % des casques défaillants et malheureusement, il rejette aussi 7 % des casques qui n'ont pas de défaut.

1. Quelle est la probabilité qu'un casque, choisi au hasard dans cette production, ne soit pas conforme et ne soit pas rejeté par le contrôle ?

2. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?

3. Quelle est la probabilité qu'un casque pris au hasard ne soit pas rejeté par ce premier contrôle ?

4. Un second contrôle de production est réalisé, indépendamment du premier contrôle. La probabilité qu'un casque de cette entreprise ne soit pas rejeté après ce deuxième contrôle est égale à 0,94. Un casque subit les deux contrôles : l'entreprise EKTR réalise un bénéfice de 89 € s'il n'est rejeté par aucun contrôle ; elle perd 40 € s'il est rejeté par les deux contrôles et elle réalise un bénéfice de 29 € sinon.
Soit B la variable aléatoire égale au bénéfice en euros réalisé par EKTR sur la fabrication d'un casque.
Déterminer l'espérance de B et interpréter ce résultat.

Soit C, l'événement "le casque est conforme"
Soit R, l'événement "le casque est rejeté"

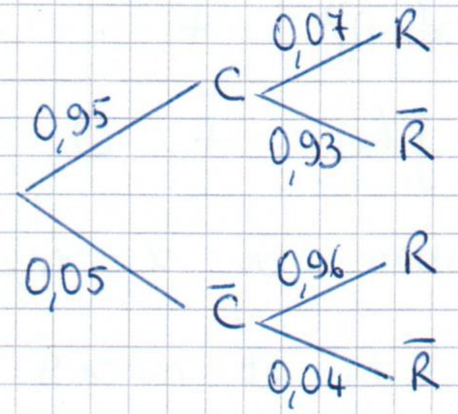
Selon l'énoncé :

$$P(\overline{C}) = \frac{5}{100} = 0,05$$

$$P_{\overline{C}}(R) = \frac{96}{100} = 0,96$$

$$P_C(R) = \frac{7}{100} = 0,07$$

D'où l'arbre de probabilité :



1. On calcule : $P(\overline{C} \cap \overline{R})$

$$P(\overline{C} \cap \overline{R}) = P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(\overline{R})$$

$$P(\overline{C} \cap \overline{R}) = 0,05 \times 0,04$$

$$\underline{P(\overline{C} \cap \overline{R}) = 0,002}$$

La probabilité que le casque soit non-conforme et ne soit pas rejeté est de 0,002.

2. Soit E, l'évènement "il y a une erreur de contrôle"

$P(E) = P(C \cap R) + P(\bar{C} \cap \bar{R})$

$P(E) = P(C) \times P_C(R) + 0{,}002$

$P(E) = 0{,}95 \times 0{,}07 + 0{,}002$

$\underline{P(E) = 0{,}0685}$

La probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle est de 0,0685

3. on calcule $P(\bar{R})$

C et $\bar{C}$ forment une partition de l'univers
Selon la formule des probabilités totales :

$P(\bar{R}) = P(C \cap \bar{R}) + P(\bar{C} \cap \bar{R})$

$P(\bar{R}) = P(C) \times P_C(\bar{R}) + 0{,}002$

$P(\bar{R}) = 0{,}95 \times 0{,}93 + 0{,}002$

$\underline{P(\bar{R}) = 0{,}8855}$

4. $B \in \{89 ; -40 ; 29\}$

Soit R_1, l'évènement "le casque est rejeté par le premier contrôle"

Selon 3 $\quad P(\overline{R_1}) = 0{,}8855$

donc $P(R_1) = 1 - P(\overline{R_1})$

$P(R_1) = 1 - 0{,}8855$

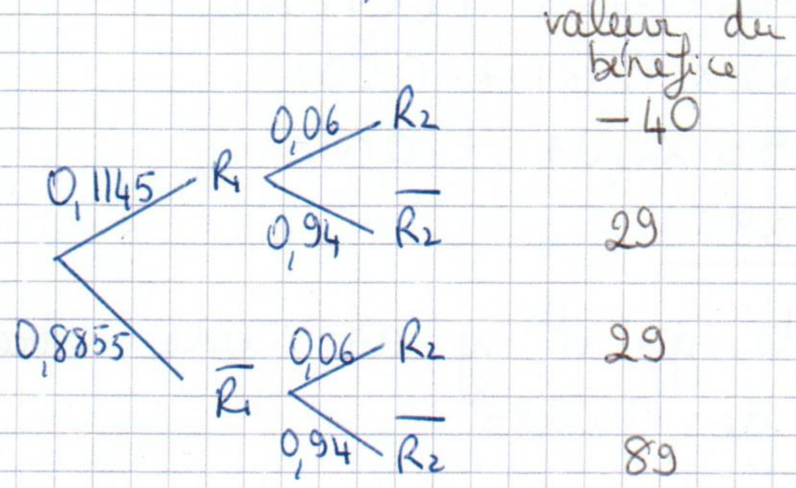
$P(R_1) = 0{,}1145$

Soit R_2, l'évènement "le casque est rejeté par le second contrôle" $\quad P(\overline{R_2}) = 0{,}94$

donc : $P(R_2) = 1 - P(\overline{R_2})$

$P(R_2) = 1 - 0{,}94$

$P(R_2) = 0{,}06$



les événements R_1 et R_2 sont indépendants donc :

$$P(R_2) = P_{R_1}(R_2)$$

$P(B=-40) = P(R_1 \cap R_2)$

$P(B=-40) = P(R_1) \times P(R_2)$ car R_1 et R_2 sont indé-pendants

$P(B=-40) = 0{,}1145 \times 0{,}06$

$P(B=-40) = 0{,}00687$

$P(B=29) = P(R_1 \cap \overline{R_2}) + P(\overline{R_1} \cap R_2)$

$P(B=29) = P(R_1) \times P(\overline{R_2}) + P(\overline{R_1}) \times P(R_2)$ *

$P(B=29) = 0{,}1145 \times 0{,}94 + 0{,}8855 \times 0{,}06$

$P(B=29) = 0{,}16076$

$P(B=89) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2})$

$P(B=89) = P(\overline{R_1}) \times P(\overline{R_2})$ *

$P(B=89) = 0{,}8855 \times 0{,}94$

$P(B=89) = 0{,}83237$

* Si A et B sont deux événements indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi, comme $\overline{A}$ et B

D'où la loi de probabilité de B

b_i	-40	29	89	total
$P(B=b_i)$	$0,00687$	$0,16076$	$0,83237$	1

$E(B) = b_1 \times P(B=b_1) + b_2 \times P(B=b_2) + b_3 \times P(B=b_3)$

$E(B) = -40 \times 0,00687 + 29 \times 0,16076 + 89 \times 0,83237$

$E(B) = 78,46817$

En moyenne, le bénéfice réalisé sur la fabrication d'un casque est de 78,47 €, quand la production est importante.