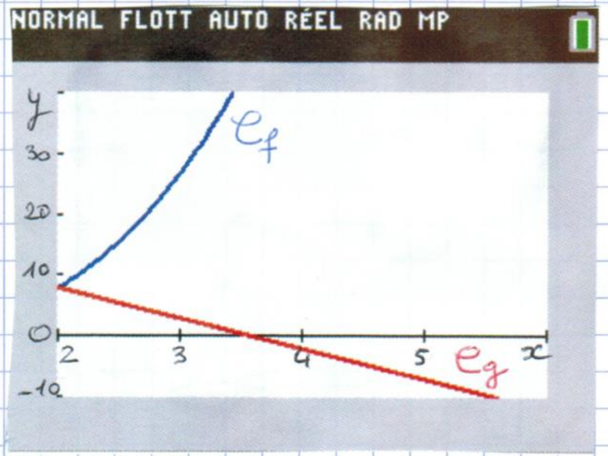
3.4 Etudier la position relative de deux courbes

Exemple : Sur $[2 ; +\infty[$ On a les courbes :

$\mathcal{C}_f$ d'équation $y = f(x)$ avec $f(x) = x^3$

$\mathcal{C}_g$ d'équation $y = g(x)$ avec $g(x) = -5x + 18$



D'après la calculatrice, il semble que $\forall x \in [2 ; +\infty[$, on ait :

$\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

Mais la calculatrice n'est pas une preuve !
On ne peut faire qu'une conjecture (c'est à dire une supposition).

Maintenant, on va faire un calcul pour prouver cette conjecture.

On forme la différence $f(x) - g(x)$ pour pouvoir ensuite étudier son signe.

$f(x) - g(x) = x^3 - (-5x + 18)$
$f(x) - g(x) = x^3 + 5x - 18$.

Ceci n'est pas un polynôme du premier ou du second degré, donc on ne dispose pas de règle donnant son signe.
On va donc devoir étudier les variations de cette fonction (c'est à dire utiliser la technique vue au §3.3).

Posons par exemple la fonction $h(x) = x^3 + 5x - 18$.
h est dérivable sur $[2 ; +\infty[$ comme fonction polynôme.

Sa dérivée est $h'(x) = 3x^2 + 5$
On voit directement que pour tout $x \in [2 ; +\infty[$, on a
$3x^2 \geq 0$ (c'est le produit de 3 qui est positif par un carré)
$5 > 0$ donc $h'(x) > 0$ pour tout $x \in [2 ; +\infty[$

x	2	$+\infty$
signe de h'	$+$	
variations de h	0 ↗	

D'après ce tableau de variations,
$h(x) \geq 0$ pour tout $x \in [2 ; +\infty[$
$f(x) - g(x) \geq 0$
$f(x) \geq g(x)$
$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$