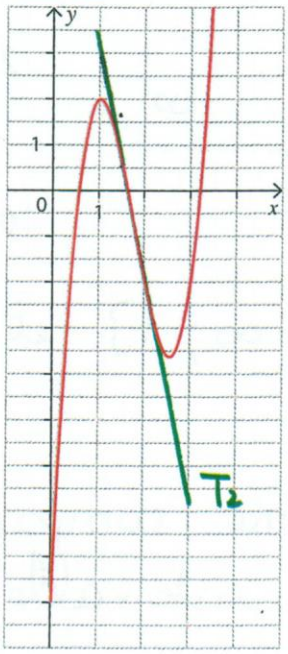
II - Extrema d'une fonction

n° 29 p. 162

Étude des extremums

29 On étudie une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



1. Par lecture graphique, estimer les nombres suivants.
a. $f(1)$
b. Les valeurs de x telles que $f'(x) = 0$.
c. $f'(2)$
2. À l'aide du graphique, donner le tableau de variation de f.
3. Quelle semble être la valeur du minimum de f sur l'intervalle $[0 ; 4]$?
4. On donne $f(x) = 3x^3 - 16x^2 + 23x - 8$.
a. Calculer $f'(x)$ puis vérifier par le calcul les résultats obtenus à la question **1**.
b. Déterminer le signe de $f'(x)$.
c. En déduire le tableau de variation de la fonction f puis retrouver le résultat obtenu à la question **3**.

1- a) $f(1) = 2$

b) la tangente au point A d'abscisse a à la courbe C_f est horizontale ssi : $f'(a) = 0$

$x = 1$ ou $x = 2{,}6$

c) $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

$$f'(2) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \frac{-5}{1}$$

$$f'(2) = -5$$

2-

x	0		1		2,6		$+\infty$
variat de f	-9	↗	2	↘	$-3{,}6$	↗	

3. Le minimum de f sur l'intervalle $[0 ; 4]$ semble être -9, atteint en $x = 0$.

4- a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme

pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 3 \times 3x^2 - 16 \times 2x + 23$

$$f'(x) = 9x^2 - 32x + 23$$

vérification des résultats de la question 1 :

a) $f(1) = 3 \times 1^3 - 16 \times 1^2 + 23 \times 1 - 8$

$f(1) = 3 - 16 + 23 - 8$

$f(1) = 2$

b) résolvons $f'(x) = 0$

$9x^2 - 32x + 23 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-32)^2 - 4 \times 9 \times 23$

$\Delta = 196$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{32 - \sqrt{196}}{2 \times 9}$ $x_2 = \dfrac{32 + \sqrt{196}}{2 \times 9}$

$x_1 = 1$ $x_2 = \dfrac{23}{9}$ $x_2 \approx 2{,}56$

c) $f'(2) = 9 \times 2^2 - 32 \times 2 + 23$

$f'(2) = -5$

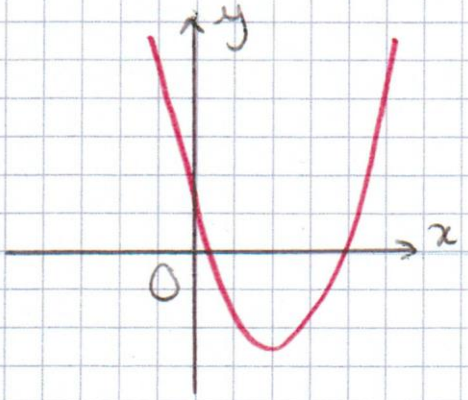
Les résultats de la question 1 sont confirmés

4 b) signe de $f'(x)$

$\Delta = 196 > 0$

$x_1 = 1$ $x_2 = \dfrac{23}{9}$

$a = 9 > 0$



x	$-\infty$		1		$\frac{23}{9}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) on en déduit le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		1		$\frac{23}{9}$		4		$+\infty$
variations de f		↗	-8	↗	2	↘	$-\frac{886}{243}$	↗	20	↗	

$f(1) = 2$

$f\left(\frac{23}{9}\right) = 3 \times \left(\frac{23}{9}\right)^3 - 16 \times \left(\frac{23}{9}\right)^2 + 23 \times \frac{23}{9} - 8$

$f\left(\frac{23}{9}\right) = -\frac{886}{243}$

$f\left(\frac{23}{9}\right) \approx -3{,}65$

$f(0) = 3 \times 0^3 - 16 \times 0^2 + 23 \times 0 - 8$

$f(0) = -8$

$f(4) = 3 \times 4^3 - 16 \times 4^2 + 23 \times 4 - 8$

$f(4) = 20$

Sur l'intervalle $[0;4]$, le minimum de f est -8, atteint en $x = 0$