3) Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité

n° 37 p 163

37 On veut montrer que pour tout réel $x \in]-\infty\,;\,3]$, $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2 \leqslant 4$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2.$$

1. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. Quel est le maximum de f sur $]-\infty\,;\,3]$?

3. Conclure.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

Pour tout réel x

$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 2x - 3$

$f'(x) = x^2 - 2x - 3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)$

$\Delta = 16$

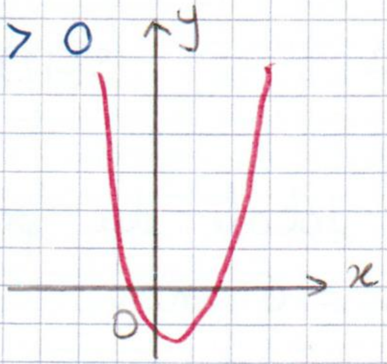
$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{2-\sqrt{16}}{2\times 1}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{2+\sqrt{16}}{2\times 1}$

$x_1 = -1$ $\qquad$ $x_2 = 3$

$a = 1 > 0$



x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		↗	$\frac{11}{3}$	↘	-7	↗	

2. le maximum de f sur $]-\infty\,;\,3]$ est $\frac{11}{3}$

3. Donc pour tout $x \in]-\infty\,;\,3]$ $\quad f(x) \leq \frac{11}{3}$ avec $\frac{11}{3} < 4$

soit $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2 \leq 4$