

4) Étudier la position relative de deux courbes représentatives

n° 62 p 166

62 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 + 3x + 1,$$

et g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$g(x) = \frac{-1}{x+2}.$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f et \mathcal{C}_g celle de la fonction g .

1. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

2. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.

3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :
 $h(x) = f(x) - g(x)$.

a. Montrer que $h(x) = \frac{(x+1)^2(x+3)}{x+2}$.

b. Étudier le signe de $h(x)$.

c. Déterminer la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à \mathcal{C}_g .

4. Démontrer que les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g admettent une tangente commune en un de leurs points d'intersection. Donner une équation de cette tangente.

1. f est une fonction polynôme du second degré définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec $a = 1$; $b = 3$ et $c = 1$

$a = 1 > 0$ donc les branches de la parabole représentant f sont tournées vers le haut

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$\alpha = -\frac{3}{2 \times 1}$$

$$\alpha = -\frac{3}{2}$$

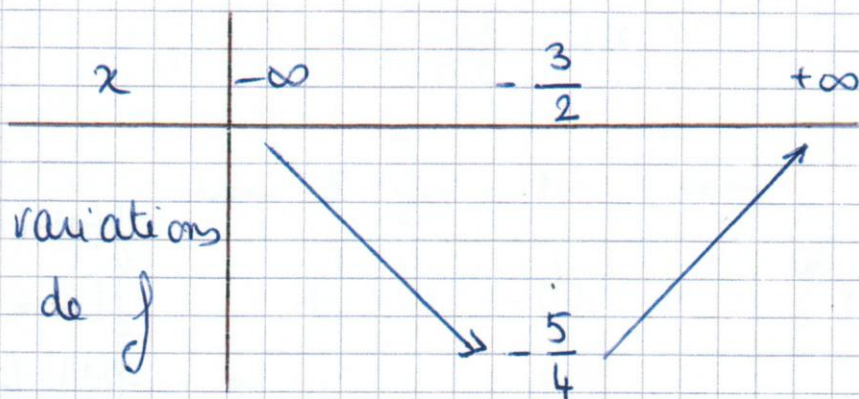
$$\beta = f(\alpha)$$

$$\beta = f\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\beta = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 1$$

$$\beta = -\frac{5}{4}$$

D'où :



2. g est dérivable sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ comme inverse d'une fonction affine.

$$g = -\frac{1}{u}$$

$$\text{donc } g' = \frac{u'}{u^2}$$

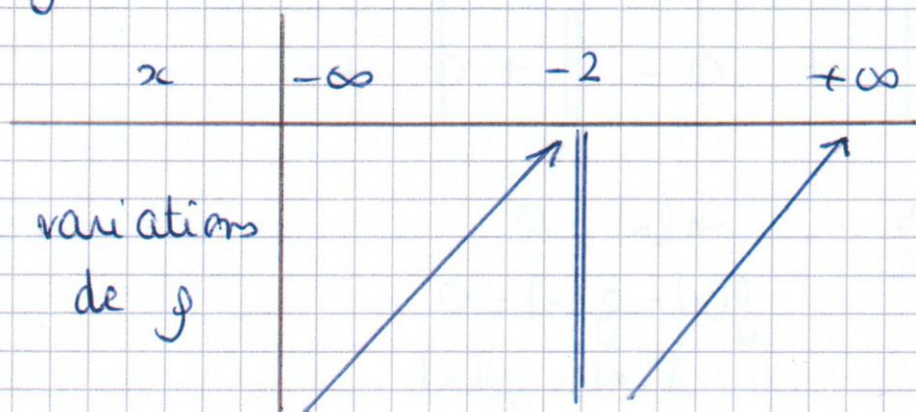
avec $u(x) = x + 2$

$$u'(x) = 1$$

pour $x \neq -2$ $g'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$

$$g'(x) > 0$$

donc g est croissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $]-2; +\infty[$



3. Pour $x \neq -2$ $h(x) = f(x) - g(x)$

$$h(x) = x^2 + 3x + 1 - \left(\frac{-1}{x+2}\right)$$

$$h(x) = \frac{(x^2 + 3x + 1)(x+2) + 1}{x+2}$$

$$h(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + x + 2x^2 + 6x + 2 + 1}{x+2}$$

$$h(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x+2}$$

or $(x+1)^2(x+3) = (x^2 + 2x + 1)(x+3)$

$$(x+1)^2(x+3) = x^3 + 2x^2 + x + 3x^2 + 6x + 3$$

$$(x+1)^2(x+3) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$h(x) = \frac{(x+1)^2(x+3)}{x+2}$$