4) Etudier la position relative de deux courbes représentatives

n° 62 p 166

62 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 + 3x + 1,$$
et g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par :
$$g(x) = \frac{-1}{x+2}.$$
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_g$ celle de la fonction g.

1. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

2. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.

3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par : $h(x) = f(x) - g(x)$.

a. Montrer que $h(x) = \frac{(x+1)^2(x+3)}{x+2}$.

b. Étudier le signe de $h(x)$.

c. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$.

4. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent une tangente commune en un de leurs points d'intersection. Donner une équation de cette tangente.

1. f est une fonction polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec $a = 1$; $b = 3$ et $c = 1$

$a = 1 > 0$ donc les branches de la parabole représentant f sont tournées vers le haut

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$
$$\alpha = -\frac{3}{2\times 1}$$
$$\alpha = -\frac{3}{2}$$

$$\beta = f(\alpha)$$
$$\beta = f\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$\beta = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\times\left(-\frac{3}{2}\right) + 1$$
$$\beta = -\frac{5}{4}$$

D'où :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
variations de f		$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	

2. g est dérivable sur $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$ comme inverse d'une fonction affine

$$g = -\frac{1}{u} \quad \text{donc} \quad g' = \frac{u'}{u^2}$$

avec $u(x) = x+2$

$u'(x) = 1$

pour $x \neq -2$ $\quad g'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

$g'(x) > 0$

donc g est croissante sur $]-\infty ; -2[$ et sur $]-2 ; +\infty[$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
variations de g		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

3. Pour $x \neq -2$

$$h(x) = f(x) - g(x)$$
$$h(x) = x^2 + 3x + 1 - \left(\frac{-1}{x+2}\right)$$
$$h(x) = \frac{(x^2+3x+1)(x+2) + 1}{x+2}$$
$$h(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + x + 2x^2 + 6x + 2 + 1}{x+2}$$
$$h(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x+2}$$

or $(x+1)^2(x+3) = (x^2+2x+1)(x+3)$

$(x+1)^2(x+3) = x^3 + 2x^2 + x + 3x^2 + 6x + 3$

$(x+1)^2(x+3) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$h(x) = \frac{(x+1)^2(x+3)}{x+2}$$