n°103 p 269

1) Les coordonnées $(x ; y)$ des points d'intersection des courbes d'équations $y = x^2 - 2$ et $x^2 + y^2 = 4$ vérifient simultanément le système $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Résolvons : $\begin{cases} y + 2 = x^2 \\ y + 2 + y^2 = 4 \end{cases}$ (on peut remplacer x^2 par un nombre qui lui est égal)

$\begin{cases} y + 2 = x^2 \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$

On résout à part l'équation $y^2 + y - 2 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4(1)(-2)$
$\Delta = 9$
$\Delta > 0$ donc il y a deux racines : $y_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{9}}{2(1)} = -2$ et $y_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{9}}{2(1)} = 1$

On obtient donc deux petits systèmes :

$\begin{cases} y + 2 = x^2 \\ y = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y + 2 = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$

On les résout :

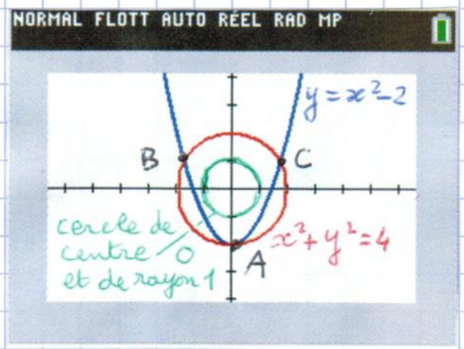
$\begin{cases} -2 + 2 = x^2 \\ y = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3 = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 = 0 \\ y = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$

Ces deux courbes (une parabole et un cercle) ont donc trois points d'intersection : $A(0 ; -2)$ $B(-\sqrt{3} ; 1)$ et $C(\sqrt{3} ; 1)$

On peut vérifier cela en traçant les deux courbes sur la calculatrice :



2) D'après la figure, le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1 n'a pas d'intersection avec la parabole d'équation $y = x^2 - 2$

Ce cercle a pour équation $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2$ soit $x^2 + y^2 = 1$

Vérifions : Soit à résoudre le système $\begin{cases} y + 2 = x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} y + 2 = x^2 \\ y + 2 + y^2 = 1 \end{cases}$ On résout à part l'équation $y^2 + y + 2 = 1$

$y^2 + y + 1 = 0$ $\Delta = (1)^2 - 4(1)(1)$ $\Delta = -3$ $\Delta < 0$ donc pas de solution.

3) a) Les coordonnées $(x;y)$ des points d'intersection des courbes d'équations $y=x^2+3$ et $x^2+(y-1)^2=1$ vérifient simultanément le système $\begin{cases} y=x^2+3 \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases}$

On essaye de faire apparaître $y-1$ dans la première équation. Cela permettra de faire une substitution dans la deuxième.

$$\begin{cases} y-1 = x^2+3-1 \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-1 = x^2+2 \\ x^2+(x^2+2)^2=1 \end{cases}$$ on a remplacé $y-1$ par x^2+2 puisque ces deux nombres sont égaux.

$$\begin{cases} y-1 = x^2+2 \\ x^2+(x^2)^2+2(x^2)(2)+2^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2+3 \\ x^2+x^4+4x^2+4=1 \end{cases} \qquad \underline{\begin{cases} y=x^2+3 \\ x^4+5x^2+3=0 \end{cases}}$$

b) $x^4+5x^2+3=0$ On pose $X=x^2$. On a donc:
$X^2+5X+3=0$
Le changement de variable permet d'obtenir une équation en X du 2^{nd} degré. On résout cette équation avec
$\Delta = 5^2-4(1)(3)$ $\Delta=13$ $\Delta>0$ donc il y a deux racines.

$X_1 = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}$ $X_1 \approx -4,302$

$X_2 = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}$ $X_2 \approx -0,697$

On a le système en X : $\begin{cases} y = X+3 \\ X = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = X+3 \\ X = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{2} + \dfrac{6}{2} \\ y = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2} + \dfrac{6}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \\ y = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Donc il y a deux couples $(X;y)$ solutions : $\left(\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2} ; \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$
et $\left(\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2} ; \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

c) Le système $S : \begin{cases} y = x^2+3 \\ x^4+5x^2+3=0 \end{cases}$ a pour inconnues $x;y$
Il faut donc trouver des couples $(x;y)$ solutions.

Pour revenir en x, on fait le changement de variable à l'envers:

$X = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}$ et $X = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}$

$x^2 = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}$ et $x^2 = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}$

impossible car $\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2} < 0$ impossible car $\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2} < 0$

x^2 est toujours positif donc il n'y a pas de solution.
On en déduit que la parabole d'équation $y=x^2+3$ et le cercle d'équation $x^2+(y-1)^2=1$ n'ont pas d'intersection.