n° 95 p 268

95 On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(-1\,;1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.
1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.
2. Déterminer les coordonnées des points D et E d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
3. Déterminer une équation cartésienne des tangentes à $\mathscr{C}$ aux points D et E.
4. Calculer les coordonnées du point F, intersection de ces deux tangentes.
5. Démontrer que les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires.

1°.
Une équation de $\mathscr{C}$ est :

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$$
$$(x-(-1))^2+(y-1)^2=\sqrt{5}^2$$
$$(x+1)^2+(y-1)^2=5$$

2°. les points d'intersections de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont tels que : $y=0$

on résout :
$$(x+1)^2+(0-1)^2=5$$
$$(x+1)^2+1=5$$
$$(x+1)^2=4$$
$$(x+1)^2-2^2=0$$
$$[(x+1)-2][(x+1)+2]=0$$
$$x+1-2=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad x+1+2=0$$
$$x-1=0 \qquad x+3=0$$
$$x=1 \qquad x=-3$$

les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont $\underline{D(1;0) \text{ et } E(-3;0)}$

3°. Soit T_D, la tangente à $\mathscr{C}$ au point D
$\vec{AD}$ est un vecteur normal à T_D

$\vec{AD}\begin{pmatrix} x_D-x_A \\ y_D-y_A \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AD}\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 0-1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AD}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'où : T_D : $2x-y+c=0$

or $D(1;0)\in T_D$

$$2x_D-y_D+c=0$$
$$2\times 1+c=0$$
$$c=-2$$

$\underline{T_D : 2x-y-2=0}$

p. 2

Soit T_E la tangente à $\mathcal{C}$ au point E

$\overrightarrow{AE}$ est un vecteur normal à T_E

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} -3-(-1) \\ 0 \quad -1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'où : $T_E : -2x - y + c = 0$

Or $E(-3;0) \in T_E$

$-2x_E - y_E + c = 0$

$-2\times(-3) - 0 + c = 0$

$6 + c = 0$

$c = -6$

$\underline{T_E : -2x - y - 6 = 0}$

4. les coordonnées de F, point d'intersection des tangentes T_D et T_E, vérifient le système :

$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ -2x - y - 6 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -2y - 8 = 0 \\ -2x - y - 6 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -2y = +8 \\ -2x - y - 6 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = \frac{+8}{-2} = -4 \\ -2x + 4 - 6 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -4 \\ -2x = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -4 \\ x = \frac{2}{-2} = -1 \end{cases}$ $\underline{F(-1,-4)}$

5. $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} x_F - x_A \\ y_F - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} -1-(-1) \\ -4 - 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} -3 - 1 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \times (-4) + (-5) \times 0$

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$

les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont orthogonaux : on en déduit que les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires.