N°15 p.28.

$u_n = 2n^2 - 3n$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

* Nous pouvons calculer les premiers termes pour avoir une idée du sens de variation de la suite :

$u_1 = 2 - 3 = -1$

$u_2 = 8 - 6 = 2$

$u_3 = 18 - 9 = 9$

La suite (u_n) semble croissante.

* Première méthode : Etudions le sens de variation de la suite (u_n) en déterminant le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

$u_n = 2n^2 - 3n$

$u_{n+1} = 2(n+1)^2 - 3(n+1)$

$u_{n+1} = 2(n^2 + 2n + 1) - 3n - 3$

$u_{n+1} = 2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3$

$u_{n+1} = 2n^2 + n - 1$

$u_{n+1} - u_n = 2n^2 + n - 1 - (2n^2 - 3n)$

$u_{n+1} - u_n = 2n^2 + n - 1 - 2n^2 + 3n$

$u_{n+1} - u_n = 4n - 1$

$4n - 1 \geq 0$ équivaut successivement à :

$4n \geq 1$

$n \geq 0{,}25$

Comme n ne prend que des valeurs entières, cette équation équivaut à $n \geq 1$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$

$u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq 1$

La suite (u_n) est croissante.

* Deuxième méthode : Etudions le sens de variation de la suite (u_n) en déterminant le sens de variation de la fonction f telle que $u_n = f(n)$ sur $[1 ; +\infty[$.

$u_n = 2n^2 - 3n$

$u_n = f(n)$ avec f définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x^2 - 3x$.

f est une fonction polynôme du second degré représentée par une parabole tournée vers le haut car $a = 2 > 0$ et de sommet S d'abscisse $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4} = 0{,}75$ et d'ordonnée $y_S = f(x_S) = f(0{,}75) = 2 \times 0{,}75^2 - 3 \times 0{,}75 = -1{,}125$.

x	1	$+\infty$
variation de f	-1 $\nearrow$	

La fonction f est croissante sur $[1 ; +\infty[$. Le nuage de points représentant la suite (u_n) est placé sur $\mathcal{C}_f$ sur $[1 ; +\infty[$ donc la suite (u_n) est elle-même croissante.

Remarque : Pour cette deuxième méthode, le sens de variation de la fonction f telle que $u_n = f(n)$ peut être obtenu en déterminant le signe de la dérivée f'.

Sur $[1 ; +\infty[$, $f(x) = 2x^2 - 3x$

$f'(x) = 2 \times 2x - 3$

$f'(x) = 4x - 3$

f' est une fonction affine croissante car $a = 4 > 0$

De plus $4x - 3 = 0$ équivaut à $x = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Suite du 15 p. 28.

x	1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	
variation de f	-1	$\nearrow$	