

1. $u_m = 2 - 4m$

$u_m = u_0 + m r$ avec $u_0 = 2$ et $r = -4$.

(u_m) est une suite arithmétique.

$r = -4 < 0$ donc la suite (u_m) est décroissante.

2. $v_m = 2m^2 + 3$

$v_m \neq u_0 + m r$ donc (v_m) n'est pas arithmétique

$v_m \neq u_0 \times q^m$ donc (v_m) n'est pas géométrique.

* Nous pouvons calculer les premiers termes pour se faire une idée du sens de variation:

$v_0 = 3$

$v_1 = 2 + 3 = 5$

$v_2 = 8 + 3 = 11$

la suite (v_m) semble croissante.

* Première méthode de détermination du sens de variation de la suite (v_m) : Etude du signe de $v_{m+1} - v_m$ pour tout entier naturel m .

$v_m = 2m^2 + 3$

$v_{m+1} = 2(m+1)^2 + 3$

$v_{m+1} = 2(m^2 + 2m + 1) + 3$

$v_{m+1} = 2m^2 + 4m + 2 + 3$

$v_{m+1} = 2m^2 + 4m + 5$

$v_{m+1} - v_m = 2m^2 + 4m + 5 - (2m^2 + 3)$

$v_{m+1} - v_m = 2m^2 + 4m + 5 - 2m^2 - 3$

$v_{m+1} - v_m = 4m + 2$

Pour tout entier naturel n , on a $4n+2 > 0$

$$U_{n+1} - U_n \geq 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$U_{n+1} \geq U_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La suite (U_n) est croissante.

* Deuxième méthode pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n) : Étudier le sens de variation de la fonction f telle que $U_n = f(n)$ sur $[0; +\infty[$.

$$U_n = 2n^2 + 3$$

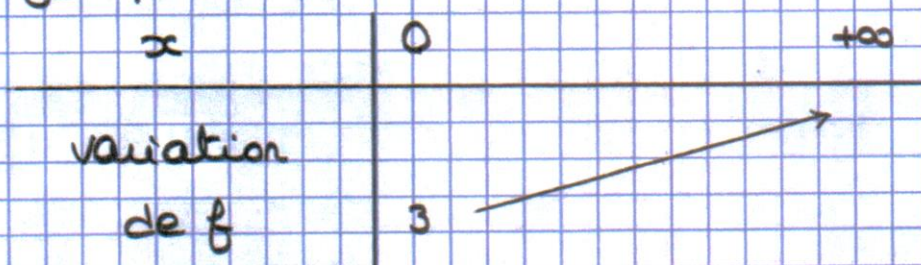
$U_n = f(n)$ avec la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = 2x^2 + 3.$$

f est une fonction polynôme du second degré représentée par une parabole tournée vers le haut car $a = 2 > 0$ de

Sommet S d'abscisse $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{4} = 0$ et d'ordonnée

$$y_S = f(x_S) = f(0) = 3.$$



La fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$ donc la suite (U_n) est elle-même croissante.

Remarque: On peut trouver le sens de variation de f à partir du signe de sa dérivée.

$$\text{Sur } [0; +\infty[, \quad f(x) = 2x^2 + 3$$


$$f'(x) = 2 \times 2x + 0$$

$$f'(x) = 4x$$

f' est une fonction affine croissante car $a = 4 > 0$

Suite du 40 p.33

De plus $f'(x)=0$ équivaut à $x=0$.

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	0	+
variation de f	3	

3. $W_n = n^2 + 2n$

$W_n \neq U_0 + n \cdot r$ donc (W_n) n'est pas une suite arithmétique

$W_n \neq U_0 \times q^n$ donc (W_n) n'est pas une suite géométrique.

* Conjeturons le sens de variation de (W_n) en calculant les premiers termes:

$$W_0 = 0$$

$$W_1 = 3$$

$$W_2 = 8$$

la suite (W_n) **semble** croissante.

* Première méthode de démonstration: Signe de $W_{n+1} - W_n$ pour tout n de \mathbb{N} .

$$W_n = n^2 + 2n$$

$$W_{n+1} = (n+1)^2 + 2(n+1)$$

$$W_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 2n + 2$$

$$W_{n+1} = n^2 + 4n + 3$$

$$W_{n+1} - W_n = n^2 + 4n + 3 - (n^2 + 2n)$$

$$W_{n+1} - W_n = n^2 + 4n + 3 - n^2 - 2n$$

$$W_{n+1} - W_n = 2n + 3$$

Pour tout entier naturel n , on a $2n + 3 \geq 0$

$$w_{m+1} - w_m \geq 0 \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}$$

$$w_{m+1} \geq w_m \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}$$

La suite (w_m) est croissante.

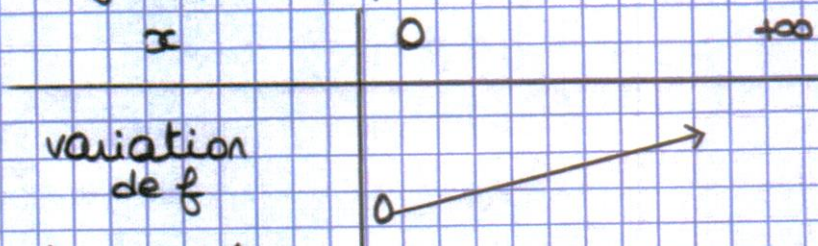
* Deuxième méthode de démonstration: étude du sens de variation de la fonction f telle que $w_m = f(m)$ sur $[0; +\infty[$.

$$w_m = m^2 + 2m$$

$$w_m = f(m) \text{ avec } f \text{ définie sur } [0; +\infty[\text{ par } f(x) = x^2 + 2x.$$

f est une fonction polynôme du second degré représentée par une parabole tournée vers le haut car $a = 1 > 0$

de sommet S d'abscisse $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$ et d'ordonnée $y_S = f(x_S) = f(-1) = 1 - 2 = -1$.



La fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$ donc la suite (w_m) est croissante.

Autre méthode pour trouver le sens de variation de f :

$$\text{Sur } [0; +\infty[, f(x) = x^2 + 2x$$

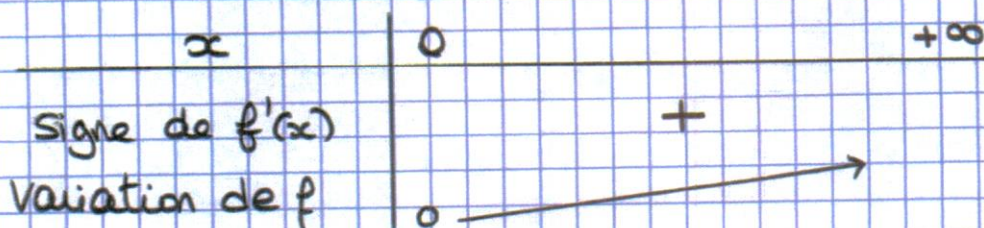
$$f'(x) = 2x + 2$$

f' est une fonction affine croissante car $a = 2 > 0$.

De plus $f'(x) = 0$ équivaut successivement à:

$$2x + 2 = 0$$

$$x = -1$$



Suite du 40 p.33.

4. $t_m = 2^n + 3^m$

$t_m \neq u_0 + m r$ donc (t_n) n'est pas arithmétique

$t_m \neq u_0 \times q^m$ donc (t_n) n'est pas géométrique.

* Conjeturons le sens de variation de la suite (t_n) :

$$t_0 = 1 + 1 = 2$$

$$t_1 = 2 + 3 = 5$$

$$t_2 = 4 + 9 = 13$$

La suite (t_n) semble croissante.

* Etudions le signe de $t_{m+1} - t_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ (il s'agit de la seule méthode possible ici).

$$t_{m+1} - t_m = 2^{m+1} + 3^{m+1} - (2^m + 3^m)$$

$$t_{m+1} - t_m = 2^{m+1} + 3^{m+1} - 2^m - 3^m$$

$$t_{m+1} - t_m = 2^{m+1} - 2^m + 3^{m+1} - 3^m$$

$$t_{m+1} - t_m = 2^m \times 2 - 2^m + 3^m \times 3 - 3^m$$

$$t_{m+1} - t_m = 2^m (2-1) + 3^m (3-1)$$

$$t_{m+1} - t_m = 2^m + 3^m \times 2$$

Passage direct possible

Pour tout entier naturel n , on a $2^n \geq 0$ et $3^n \geq 0$

donc $t_{m+1} - t_m \geq 0$ pour tout entier naturel n

$t_{m+1} \geq t_m$ pour tout entier naturel n

(t_n) est croissante.