N°40 p.33.

1. $u_n = 2 - 4n$

$u_n = u_0 + nr$ avec $u_0 = 2$ et $r = -4$.

(u_n) est une suite arithmétique.

$r = -4 < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

2. $v_n = 2n^2 + 3$

$v_n \neq u_0 + nr$ donc (v_n) n'est pas arithmétique

$v_n \neq u_0 \times q^n$ donc (v_n) n'est pas géométrique.

* Nous pouvons calculer les premiers termes pour se faire une idée du sens de variation :

$v_0 = 3$

$v_1 = 2 + 3 = 5$

$v_2 = 8 + 3 = 11$

La suite (v_n) semble croissante.

* Première méthode de détermination du sens de variation de la suite (v_n) : Etude du signe de $v_{n+1} - v_n$ pour tout entier naturel n.

$v_n = 2n^2 + 3$

$v_{n+1} = 2(n+1)^2 + 3$

$v_{n+1} = 2(n^2 + 2n + 1) + 3$

$v_{n+1} = 2n^2 + 4n + 2 + 3$

$v_{n+1} = 2n^2 + 4n + 5$

$v_{n+1} - v_n = 2n^2 + 4n + 5 - (2n^2 + 3)$

$v_{n+1} - v_n = 2n^2 + 4n + 5 - 2n^2 - 3$

$v_{n+1} - v_n = 4n + 2$

Pour tout entier naturel n, on a $4n+2>0$

$v_{n+1} - v_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$v_{n+1} \geq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

La suite (v_n) est croissante.

* Deuxième méthode pour déterminer le sens de variation de la suite (v_n) : Etudier le sens de variation de la fonction f telle que $v_n = f(n)$ sur $[0;+\infty[$.

$v_n = 2n^2+3$

$v_n = f(n)$ avec la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$f(x) = 2x^2+3$.

f est une fonction polynôme du second degré représentée par une parabole tournée vers le haut car $a=2>0$ de Sommet S d'abscisse $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{4} = 0$ et d'ordonnée

$y_S = f(x_S) = f(0) = 3$.

x	0	$+\infty$
variation de f	3	$\nearrow$

La fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ donc la suite (v_n) est elle-même croissante.

Remarque : On peut trouver le sens de variation de f à partir du signe de sa dérivée.

Sur $[0;+\infty[$, $f(x) = 2x^2+3$

$f'(x) = 2 \times 2x + 0$

$f'(x) = 4x$

f' est une fonction affine croissante car $a=4>0$

Suite du 40 p.33

De plus $f'(x)=0$ équivaut à $x=0$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	0 $\qquad$ $+$
variation de f	3 $\nearrow$

3. $w_n = n^2+2n$

$w_n \neq u_0 + nr$ donc (w_n) n'est pas une suite arithmétique

$w_n \neq u_0 \times q^n$ donc (w_n) n'est pas une suite géométrique.

* Conjecturons le sens de variation de (w_n) en calculant les premiers termes :

$w_0 = 0$

$w_1 = 3$

$w_2 = 8$

la suite (w_n) semble croissante.

* Première méthode de démonstration : Signe de $w_{n+1} - w_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$w_n = n^2 + 2n$

$w_{n+1} = (n+1)^2 + 2(n+1)$

$w_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 2n + 2$

$w_{n+1} = n^2 + 4n + 3$

$w_{n+1} - w_n = n^2 + 4n + 3 - (n^2 + 2n)$

$w_{n+1} - w_n = n^2 + 4n + 3 - n^2 - 2n$

$w_{n+1} - w_n = 2n + 3$

Pour tout entier naturel n, on a $2n+3 \geq 0$

$w_{n+1} - w_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
$w_{n+1} \geq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
La suite (w_n) est croissante.

* Deuxième méthode de démonstration : étude du sens de variation de la fonction f telle que $w_n = f(n)$ sur $[0;+\infty[$.

$w_n = n^2 + 2n$
$w_n = f(n)$ avec f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x$.
f est une fonction polynôme du second degré représentée par une parabole tournée vers le haut car $a = 1 > 0$ de sommet S d'abscisse $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$ et d'ordonnée $y_S = f(x_S) = f(-1) = 1 - 2 = -1$.

x	0	$+\infty$
variation de f	0 ↗	

La fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ donc la suite (w_n) est croissante.

Autre méthode pour trouver le sens de variation de f :

Sur $[0;+\infty[$, $f(x) = x^2 + 2x$
$f'(x) = 2x + 2$
f' est une fonction affine croissante car $a = 2 > 0$.
De plus $f'(x) = 0$ équivaut successivement à :
$2x + 2 = 0$
$x = -1$

x	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	
variation de f	0 ↗	

Suite du 40 p.33.

4. $t_n = 2^n + 3^n$

$t_n \neq u_0 + nr$ donc (t_n) n'est pas arithmétique

$t_n \neq u_0 \times q^n$ donc (t_n) n'est pas géométrique.

* Conjecturons le sens de variation de la suite (t_n) :

$t_0 = 1 + 1 = 2$

$t_1 = 2 + 3 = 5$

$t_2 = 4 + 9 = 13$

La suite (t_n) semble croissante.

* Etudions le signe de $t_{n+1} - t_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (il s'agit de la seule méthode possible ici).

$t_{n+1} - t_n = 2^{n+1} + 3^{n+1} - (2^n + 3^n)$

$t_{n+1} - t_n = 2^{n+1} + 3^{n+1} - 2^n - 3^n$

$t_{n+1} - t_n = 2^{n+1} - 2^n + 3^{n+1} - 3^n$

$t_{n+1} - t_n = 2^n \times 2 - 2^n + 3^n \times 3 - 3^n$

$t_{n+1} - t_n = 2^n(2-1) + 3^n(3-1)$

$t_{n+1} - t_n = 2^n + 3^n \times 2$

Passage direct possible

Pour tout entier naturel n, on a $2^n \geqslant 0$ et $3^n \geqslant 0$

donc $t_{n+1} - t_n \geq 0$ pour tout entier naturel n

$t_{n+1} \geq t_n$ pour tout entier naturel n

(t_n) est croissante.