

N° 41 p. 33.

$$u_m = m^2 - 8m + 2 \text{ pour tout } m \text{ de } \mathbb{N}.$$

\* Nous pouvons calculer les premiers termes de la suite afin d'avoir une idée du sens de variation.

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = 1 - 8 + 2 = -5$$

$$u_2 = 4 - 16 + 2 = -10$$

La suite  $(u_m)$  semble décroissante.

\* Première méthode: Étudions le sens de variation de la suite  $(u_m)$  en déterminant le signe de  $u_{m+1} - u_m$  pour tout  $n$ .

$$u_m = m^2 - 8m + 2$$

$$u_{m+1} = (m+1)^2 - 8(m+1) + 2$$

$$u_{m+1} = m^2 + 2m + 1 - 8m - 8 + 2$$

$$u_{m+1} = m^2 - 6m - 5$$

$$u_{m+1} - u_m = m^2 - 6m - 5 - (m^2 - 8m + 2)$$

$$u_{m+1} - u_m = m^2 - 6m - 5 - m^2 + 8m - 2$$

$$u_{m+1} - u_m = 2m - 7$$

$2m - 7 \geq 0$  équivaut successivement à:

$$2m \geq 7$$

$$m \geq 3,5$$

Comme  $m$  ne prend que des valeurs entières, cette inéquation équivaut à  $m \geq 4$ .

$$u_{m+1} - u_m \geq 0 \text{ pour tout entier naturel } m \geq 4$$

$$u_{m+1} \geq u_m \text{ pour tout entier naturel } m \geq 4$$

La suite  $(u_n)$  n'est pas monotone.

La suite  $(u_n)$  est croissante à partir du rang 4.

### Remarque:

La conjecture initiale faite avec les premiers termes "la suite  $(u_n)$  semble décroissante" est contredite par la démonstration. Cet exemple montre bien l'intérêt de faire la démonstration.

\* Deuxième méthode: Etudions le sens de variation de la suite  $(u_n)$  en déterminant le sens de variation de la fonction  $f$  telle que  $u_n = f(n)$  sur  $[0; +\infty[$ .

$$u_n = n^2 - 8n + 2$$

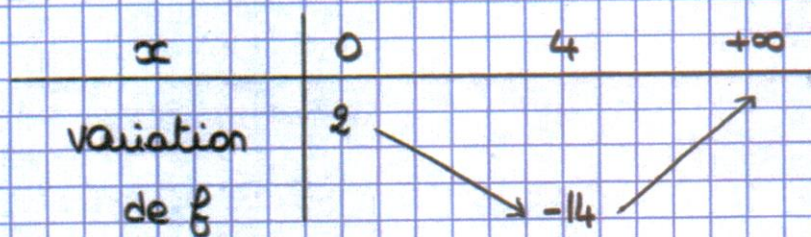
$u_n = f(n)$  avec la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = x^2 - 8x + 2.$$

$f$  est une fonction polynôme du second degré représentée par une parabole tournée vers le haut car  $a = 1 > 0$  et de

sommet  $S$  d'abscisse  $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2} = 4$  et d'ordonnée

$$y_S = f(x_S) = f(4) = 16 - 32 + 2 = -14.$$



La fonction  $f$  est décroissante sur  $[0; 4]$  et croissante sur  $[4; +\infty[$ . Le nuage de points représentant la suite  $(u_n)$  est placé sur  $\mathbb{C}_f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  donc la suite  $(u_n)$  n'est pas monotone. La suite  $(u_n)$  est croissante à partir du rang 4.

## Suite du 41 p. 33.

Remarque: Pour cette 2<sup>ème</sup> méthode, nous pouvons chercher le sens de variation de la fonction  $f$  à partir du signe de sa dérivée.

$$\text{Sur } [0; +\infty[, \quad f(x) = x^2 - 8x + 2$$

$$f'(x) = 2x - 8$$

$f'$  est une fonction affine croissante car  $a > 0$ .

De plus  $f'(x) = 0$  équivaut successivement à:

$$2x - 8 = 0$$

$$x = 4.$$

