N°41 p.33.

$u_n = n^2 - 8n + 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

* Nous pouvons calculer les premiers termes de la suite afin d'avoir une idée du sens de variation.

$u_0 = 2$

$u_1 = 1 - 8 + 2 = -5$

$u_2 = 4 - 16 + 2 = -10$

La suite (u_n) semble décroissante.

* Première méthode : Etudions le sens de variation de la suite (u_n) en déterminant le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout n.

$u_n = n^2 - 8n + 2$

$u_{n+1} = (n+1)^2 - 8(n+1) + 2$

$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - 8n - 8 + 2$

$u_{n+1} = n^2 - 6n - 5$

$u_{n+1} - u_n = n^2 - 6n - 5 - (n^2 - 8n + 2)$

$u_{n+1} - u_n = n^2 - 6n - 5 - n^2 + 8n - 2$

$u_{n+1} - u_n = 2n - 7$

$2n - 7 \geq 0$ équivaut successivement à :

$2n \geq 7$

$n \geq 3{,}5$

Comme n ne prend que des valeurs entières, cette inéquation équivaut à $n \geq 4$.

$u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier naturel $n \geq 4$

$u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier naturel $n \geq 4$

La suite (u_n) n'est pas monotone.
La suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

Remarque:

La conjecture initiale faite avec les premiers termes "la suite (u_n) semble décroissante" est contredite par la démonstration. Cet exemple montre bien l'intérêt de faire la démonstration.

* Deuxième méthode: Etudions le sens de variation de la suite (u_n) en déterminant le sens de variation de la fonction f telle que $u_n = f(n)$ sur $[0;+\infty[$.

$u_n = n^2 - 8n + 2$

$u_n = f(n)$ avec la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8x + 2$.

f est une fonction polynôme du second degré représentée par une parabole tournée vers le haut car $a = 1 > 0$ et de sommet S d'abscisse $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2} = 4$ et d'ordonnée $y_S = f(x_S) = f(4) = 16 - 32 + 2 = -14$.

x	0		4		$+\infty$
variation de f	2	$\searrow$	-14	$\nearrow$	

La fonction f est décroissante sur $[0;4]$ et croissante sur $[4;+\infty[$. Le nuage de points représentant la suite (u_n) est placé sur C_f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc la suite (u_n) n'est pas monotone. La suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

Suite du 41 p. 33.

Remarque : Pour cette 2ième méthode, nous pouvons chercher le sens de variation de la fonction f à partir du signe de sa dérivée.

Sur $[0 ; +\infty[$, $\quad f(x) = x^2 - 8x + 2$

$f'(x) = 2x - 8$

f' est une fonction affine croissante car $a > 0$.

De plus $f'(x) = 0$ équivaut successivement à :

$2x - 8 = 0$

$x = 4$.

x	0		4		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variation de f	2	$\searrow$	-14	$\nearrow$	