III - Tableau de variations et représentation graphique

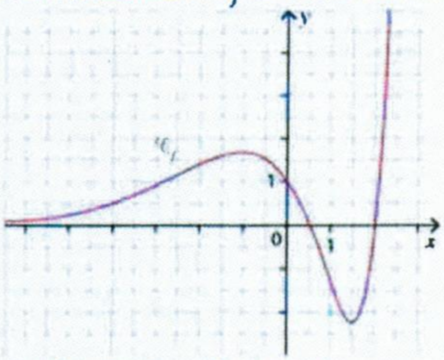
n° 47 p 197

47 CALCUL MENTAL ALGO

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 2{,}5x + 1)e^x.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. On note f' la fonction dérivée de f.
a. Calculer $f'(x)$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur son domaine de définition.
c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -1 recoupe la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M.
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de l'abscisse de M (expliquer la démarche).
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0.
4. Compléter la fonction en Python ci-dessous afin qu'elle permette d'approcher, au dixième près, l'abscisse du point P intersection de la tangente $\mathscr{T}$ et de $\mathscr{C}_f$.

```
from math import exp
def intersect():
    x=0
    y=1
    z=1
    while y>=z:
        x=. x+0,1
        y=-1.5*x+1
        z=. (x**2-2,5*x+1)*exp(x)
    return x
```

1_ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$

$f = uv$

$f' = u'v + uv'$

Pour tout réel x

$u(x) = x^2 - 2{,}5x + 1$

$u'(x) = 2x - 2{,}5$

$v(x) = e^x$

$v'(x) = e^x$

$f'(x) = (2x - 2{,}5)e^x + (x^2 - 2{,}5x + 1)e^x$

$f'(x) = e^x(2x - 2{,}5 + x^2 - 2{,}5x + 1)$

$f'(x) = e^x(x^2 - 0{,}5x - 1{,}5)$

étude de $x^2 - 0{,}5x - 1{,}5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-0{,}5)^2 - 4 \times 1 \times (-1{,}5)$

$\Delta = 6{,}25$

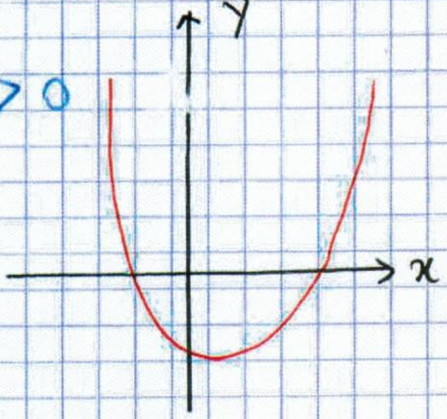
$\Delta > 0$ le polynôme admet deux racines x_1 et x_2 avec :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{0{,}5-\sqrt{6{,}25}}{2\times 1}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{0{,}5+\sqrt{6{,}25}}{2\times 1}$

$x_1 = -1$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{3}{2}$

$a = 1 > 0$



Pour tout réel x : $\quad e^x > 0$

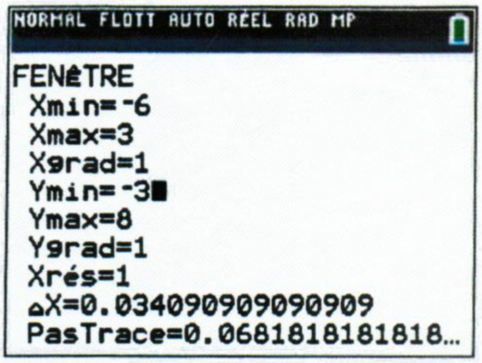
On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f

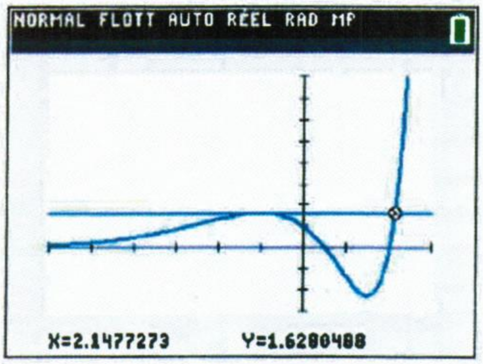
x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
e^x		+		+		+	
$x^2-0{,}5x-1{,}5$		+	0	−	0	+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
variations de f		↗	$4{,}5e^{-1}$	↘	$-0{,}5e^{1{,}5}$	↗	

$f(-1) = ((-1)^2 - 2{,}5\times(-1) + 1)\, e^{-1} = 4{,}5e^{-1}$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2{,}5\times\frac{3}{2} + 1\right) e^{\frac{3}{2}} = -0{,}5\, e^{1{,}5}$

2. $\boxed{f(x)}$ $Y_1 = (X^2 - 2{,}5X + 1)e^X$





$\boxed{\text{dessin}}$ (= $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{prgm}}$)

5: Tangente(

X = −1.

puis $\boxed{\text{trace}}$

Une valeur approchée de l'abscisse de M est donc 2,1.

3. Soit $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 0. Une équation de $\mathcal{T}$ est :

$\mathcal{T}$: $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$

avec : $f'(0) = e^0(0^2 - 0{,}5 \times 0 - 1{,}5)$

$f'(0) = -1{,}5$

$f(0) = (0^2 - 2{,}5 \times 0 + 1)e^0$

$f(0) = 1$

$\mathcal{T}$: $y = -1{,}5x + 1$