n° 33 p. 102

33 On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2}{2+\cos x}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que la fonction f est paire.
3. Montrer que la fonction f est périodique et de période 2π.

1_ $f(x)$ existe si :

$2 + \cos x \neq 0$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$2+(-1) \leq 2 + \cos x \leq 2+1$

$1 \leq 2 + \cos x \leq 3$

Pour tout réel x : $2 + \cos x \neq 0$

Donc : f est définie sur $\mathbb{R}$.

2_ Pour tout réel x

$$f(-x) = \frac{2}{2+\cos(-x)}$$

or, $\cos(-x) = \cos x$

$$f(-x) = \frac{2}{2+\cos x}$$

$f(-x) = f(x)$

la fonction f est paire.

3_ Pour tout réel x :

$$f(x+2\pi) = \frac{2}{2+\cos(x+2\pi)}$$

or : $\cos(x+2\pi) = \cos x$

$$f(x+2\pi) = \frac{2}{2+\cos x}$$

$f(x+2\pi) = f(x)$

la fonction f est 2π-périodique.