n° 34 p 102

34 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(2x) + \cos(x)\sin(x).$$

1. Montrer que la fonction f est périodique et de période π.
2. Déterminer la parité de la fonction f.

f est définie sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.

1. Pour tout réel x

$f(x+\pi) = \sin[2(x+\pi)] + \cos(x+\pi)\sin(x+\pi)$

$f(x+\pi) = \sin(2x+2\pi) + \cos(x+\pi)\sin(x+\pi)$

or : la fonction sinus est 2π-périodique ;

pour tout $X \in \mathbb{R}$ $\sin(X+2\pi) = \sin X$

et : pour tout réel x

$\cos(x+\pi) = -\cos x$

$\sin(x+\pi) = -\sin x$

$f(x+\pi) = \sin(2x) + (-\cos x) \times (-\sin x)$

$f(x+\pi) = \sin(2x) + \cos x \times \sin x$

$f(x+\pi) = f(x)$

f est donc <u>périodique de période π.</u>

2. Pour tout réel x

$f(-x) = \sin(-2x) + \cos(-x)\sin(-x)$

or :
- la fonction cosinus est paire
  pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\cos(-x) = \cos x$
- la fonction sinus est impaire
  pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sin(-x) = -\sin x$

$\sin(-2x) = -\sin(2x)$

$f(-x) = -\sin(2x) + \cos x \times (-\sin x)$

$f(-x) = -\sin(2x) - \cos x \sin x$

$f(-x) = -(\sin(2x) + \cos x \sin x)$

$f(-x) = -f(x)$

f est donc <u>impaire</u>.