CHAPITRE 1 : Fonctions du second degré

[1 Définition 2](#_Toc17478230)

[*2* Représentation graphique, variation, extremum d’une fonction polynôme du second degré *f* 2](#_Toc17478231)

[2.1 Représentation graphique 2](#_Toc17478232)

[2.2 Variation et extremum 2](#_Toc17478233)

[2.3 Applications directes 3](#_Toc17478234)

[2.4 Exercice de recherche 3](#_Toc17478235)

[3 Forme canonique d’une fonction polynôme du second degré 3](#_Toc17478236)

[3.1 Reconnaitre la forme canonique et les autres formes d’un polynôme du second degré 3](#_Toc17478237)

[3.2 Déterminer la forme canonique en utilisant les identités remarquables 4](#_Toc17478238)

[3.2.1 Méthode 4](#_Toc17478239)

[3.2.2 Exemples 4](#_Toc17478240)

[3.3 Recherche de la forme canonique avec une formule 5](#_Toc17478241)

[3.3.1 Activité de découverte de la formule 5](#_Toc17478242)

[3.3.2 Application directe 5](#_Toc17478243)

[3.3.3 Exercice de recherche 5](#_Toc17478244)

[3.4 Forme canonique pour étudier les variations d’une fonction du second degré 6](#_Toc17478245)

[4 Racines, factorisation, résolution d’équation à l’aide de racines évidentes 6](#_Toc17478246)

[4.1 Résolutions d’équations par facteur commun ou identités remarquables 6](#_Toc17478247)

[4.2 Racines et forme factorisée de ax² + bx + c 6](#_Toc17478248)

[4.3 Application 6](#_Toc17478249)

[4.4 Somme et produit des racines 7](#_Toc17478250)

[4.5 Forme factorisée à partir d’une ou 2 racines évidentes 8](#_Toc17478251)

[4.5.1 Deux racines évidentes 8](#_Toc17478252)

[4.5.2 Une racine évidente 8](#_Toc17478253)

[4.6 Signe d’un polynôme du second degré factorisé 8](#_Toc17478254)

[5 Racines, factorisation, équation, inéquation : formules générales 9](#_Toc17478255)

[5.1 Résoudre une équation du second degré 9](#_Toc17478256)

[5.2 Applications directes 10](#_Toc17478257)

[5.3 Exercice de recherche 10](#_Toc17478258)

[5.4 Signe d’un polynôme du second degré et résolution d’inéquation 10](#_Toc17478259)

[5.5 Résoudre une inéquation du second degré 11](#_Toc17478260)

[5.6 Factoriser un polynôme du second degré 12](#_Toc17478261)

CHAPITRE 1 : Fonctions polynômes du second degré

# Définition

Une fonction polynôme du second degré est une fonction *f* définie sur $R$ dont l’expression peut être mise sous la forme développée $f(x)= ax^{2} +bx+c$ où les coefficients *a*, *b* et *c* sont des constantes réelles et $a \ne 0.$

* Reconnaitre les fonctions polynômes du second degré : 1 p. 57

# Représentation graphique, variation, extremum d’une fonction polynôme du second degré *f*

## Représentation graphique

Dans un repère du plan, la courbe représentative d’une fonction polynôme du second degré *f* est une parabole de sommet S(α ;β) avec $α=\frac{-b}{2a}$ et β = *f*(*α*). Elle admet pour axe de symétrie la droite d’équation *x*=*α*.

## Variation et extremum

Si $a>0$, la parabole est tournée vers le haut donc *f* est strictement décroissante sur $\left]- \infty ; α\right[$ et strictement croissante sur $\left[α ; +\infty \right[$. *f* admet un minimum en α égal à β.

Si $a<0$, la parabole est tournée vers le bas donc *f* est strictement croissante sur $\left]- \infty ; α\right[$ et strictement décroissante sur $\left[α ; +\infty \right[$. *f* admet un maximum en α égal à β.



## Applications directes

* Soit *f* la fonction définie sur $R$ par $f(x)=-x^{2} +2x+3$. Déterminer le tableau de variation de *f*.
* Soit *f* la fonction définie sur $R$ par $f(x)=-3x^{2} +6x+7$ Montrer que *f* admet un maximum et préciser sa valeur.

## Exercice de recherche

$OABC$ est un tétraèdre tel que $OAB$, $OAC$ et $OBC$ sont des triangles **rectangles isocèles en O** et **OA = OB = OC = 4**.

Un artiste souhaite utiliser ce tétraèdre comme support pour réaliser puis présenter un tableau correspondant au rectangle MNPQ sur le schéma.

M, N, P et Q sont des points des segments [OA], [OB], [CB] et [AC] respectivement. Le tableau sera placé de telle façon que (MN)//(AB), (NP)//(OC), (QP)//(AB) et (MQ)//(OC).

On pose OM = *x*, avec $x\in \left[0 ;4\right] $et on note *f*(*x*) l’aire du tableau rectangulaire MNPQ.

L’artiste souhaite réaliser un tableau d’aire maximale. *Le but de l’exercice est de déterminer la position de M sur [OA] qui permet de réaliser son souhait.*

1. a) Calculer la longueur AB.
	1. Dans le triangle OAB, démontrer que MN =$\sqrt{2} x$.
	2. Déterminer, de même, MQ en fonction de *x*.
2. Montrer que $f\left(x\right)= -\sqrt{2} x^{2}+4\sqrt{2 }x$, pour tout *x* de $\left[0 ;4\right]$.
3. a) Dresser le tableau de variation de la fonction *f* sur $\left[0 ;4\right]$, en justifiant.
	1. En déduire où placer M pour que l’aire du tableau rectangulaire MNPQ soit maximale.

# Forme canonique d’une fonction polynôme du second degré

## Reconnaitre la forme canonique et les autres formes d’un polynôme du second degré

a/ On donne trois formes d’expressions pour une même fonction polynôme du second degré *f*.

* Nommer chacune des formes (la forme inconnue sera la forme canonique).
* Comment peut-on reconnaitre la forme canonique ?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Forme de l’expression | *f*(*x*)=(*x*−1)(2*x*−3) | $$f\left(x\right)=2x^{2}-5x+3$$ | $$f\left(x\right)=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^{2}-\frac{1}{8}$$ |
|  | Forme factorisée | Forme développée | Forme canonique |

Dans la forme canonique la variable *x* apparait une seule fois.

b/ Mettre une croix dans la case de la forme qui convient :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Expression | Forme factorisée | Forme développée | Forme canonique |
| $$2x(x+1)$$ |  |  |  |
| $$2x^{2}+3$$ |  |  |  |
| $$-x^{2}+3x+1$$ |  |  |  |
| $$2\left(x+3\right)^{2}+1$$ |  |  |  |
| $$-3x^{2}$$ |  |  |  |

## Déterminer la forme canonique en utilisant les identités remarquables

### Méthode

Développer $\left(x+a\right)^{2}$ et $\left(x-a\right)^{2}$ :

$\left(x+a\right)^{2}=x^{2}+2ax+a^{2}$ et $\left(x-a\right)^{2}=x^{2}-2ax+a^{2}$

Donc $\left(x+a\right)^{2}-a^{2}=x^{2}+2ax$ et $\left(x-a\right)^{2}-a^{2}=x^{2}-2ax$

### Exemples

* $f\left(x\right)=-2x^{2}+4x+$4

Mettre *a*=-2 en facteur : $f\left(x\right)=-2(x^{2}-2x-2)$

On remarque que $x^{2}-2x=\left(x-1\right)^{2}-1$ donc $f\left(x\right)=-2\left((x-1\right)^{2}-1-2)$.

$$f\left(x\right)=-2\left(x-1\right)^{2}+6$$

* $g\left(x\right)=5x^{2}+20x+10$

$$g\left(x\right)=5(x^{2}+4x+2)$$

comme $x^{2}+4x=\left(x+2\right)^{2}-4$ alors $g\left(x\right)=5(\left(x+2\right)^{2}-4+2)$

$g\left(x\right)=5(\left(x+2\right)^{2}-2)$ $g\left(x\right)=5\left(x+2\right)^{2}-10$

Exemple supplémentaire : Mettre sous la forme canonique

* $h\left(x\right)=-3x^{2}+12x-3$

On trouve $h\left(x\right)=-3\left(x-2\right)^{2}+9$

## Recherche de la forme canonique avec une formule

### Activité de découverte de la formule

Compléter le tableau suivant :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Forme développée | Forme canonique | Coordonnées $(α ;β)$ du sommet $S$ de la parabole représentant la fonction  |
| $$f\left(x\right)=-2x^{2}+4x+4$$ | $$f\left(x\right)=-2\left(x-1\right)^{2}+6$$ | $$α=\frac{-4}{-4}=1$$$$β=f\left(1\right)=-2+4+4=6$$ |
| $$g\left(x\right)=5x^{2}+20x+10$$ | $$g\left(x\right)=5\left(x+2\right)^{2}-10$$ | $$α=\frac{-20}{10}=-2$$$$β=g\left(-2\right)=-10$$ |
| $$h\left(x\right)=-3x^{2}+12x-3$$ | $$h\left(x\right)=-3\left(x-2\right)^{2}+9$$ | $$α=\frac{-12}{-6}=2$$$$β=h\left(2\right)=-12+24-3=9$$ |
| $$f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$$ | $$f\left(x\right)=a\left(x-α\right)^{2}+β$$ | $$α=\frac{-b}{2a} ; β=f\left(α\right)$$ |

### Application directe

Soit *f* la fonction définie sur $R$ par $f\left(x\right)=-2x^{2}+12x-3$.

Calculer sa forme canonique. $α=\frac{-12}{-4}=3 ; β=f\left(3\right)=15$

$$f\left(x\right)=-2\left(x-3\right)^{2}+15$$

### Exercice de recherche

L’architecte Antonio Gaudi a conçu l’entrée du palais Güell de Barcelone à partir d’une parabole représentée dans un repère orthonormal où une unité de longueur représente 1 mètre en réalité.

La hauteur de la porte est de 4,2 m et sa largeur est de 3,6 m.

Déterminer la forme canonique de la fonction polynôme du second degré représentée.

## Forme canonique pour étudier les variations d’une fonction du second degré

Déterminer les tableaux de variation sur $R$ des fonctions *f* et g définies respectivement par

$f\left(x\right)=2\left(x+3\right)^{2}-1$ et $g\left(x\right)=-3x^{2}+1$

# Racines, factorisation, résolution d’équation à l’aide de racines évidentes

## Résolutions d’équations par facteur commun ou identités remarquables

Résoudre dans $R$ les équations suivantes, si cela est possible :

1. $5x^{2}-10x=0$
2. $9x^{2}-25=0$
3. $x^{2}-2x+1=0$
4. $2x^{2}+2x-4=0$

## Racines et forme factorisée de ax² + bx + c

Les solutions $x\_{1}$ et $x\_{2}$ de l’équation $ax^{2}+bx+c=0$ avec $a\ne 0$, si elles existent, sont appelées **les racines** du trinôme $ax^{2}+bx+c$. Ce **sont les valeurs de** $x$ **telles que** $f(x)=0$.

La forme factorisée de $ax^{2}+bx+c$est alors $a(x-x\_{1})(x-x\_{2})$.

## http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/41/Fa%C3%A7ana_Palau_Guell-Barcelona.Catalunya.jpgApplication

L’architecte Antonio Gaudi a conçu l’entrée du palais Güell de Barcelone à partir d’une parabole représentée dans un repère orthonormal où une unité de longueur représente 1 mètre en réalité.

La hauteur de la porte est de 4,2 m et sa largeur est de 3,6 m.

Déterminer la forme factorisée de la fonction polynôme du second degré représentée.

## Somme et produit des racines

Soient *x*1 et *x*2 les racines de $ax^{2}+bx+c$.

$$x\_{1}+x\_{2}=-\frac{b}{a}$$

Démonstration :

Par symétrie, α est le milieu de $[x\_{1};x\_{2}]$

$$α=\frac{x\_{1}+x\_{2}}{2}$$

$$x\_{1}+x\_{2}=2α$$

$$x\_{1}+x\_{2}=2\frac{-b}{2a}$$

donc *x*1 + *x*2 $=-\frac{b}{a}$

$$x\_{1}×x\_{2}=\frac{c}{a}$$

*Démonstration* :

$$ax^{2}+bx+c=a(x-x\_{1})(x-x\_{2})$$

$$ax^{2}+bx+c=a(x^{2}-xx\_{2}-x\_{1}x+x\_{1}x\_{2})$$

$$ax^{2}+bx+c=ax^{2}-axx\_{2}-ax\_{1}x+a x\_{1}x\_{2}$$

$$ax^{2}+bx+c=ax^{2}+(-ax\_{2}-ax\_{1})x+a x\_{1}x\_{2}$$

$$ax^{2}+bx+c=ax^{2}+\left(-ax\_{2}-ax\_{1}\right)x+a x\_{1}x\_{2} $$

Les coefficients des termes de même degré doivent être égaux. Donc, par identification, on a

$$c=a x\_{1}x\_{2}$$

donc $x\_{1} × x\_{2} =\frac{c}{a}$

## Forme factorisée à partir d’une ou 2 racines évidentes

### Deux racines évidentes

$$f\left(x\right)=2x^{2}+2x-4$$

On appelle "racines évidentes" les valeurs entières $-3;-2 ;-1; 0; 1; 2; 3.$

1 et -2 sont des racines évidentes de $f(x)$ car $2(1)^{2}+2\left(1\right)-4=2+2-4=0$

et $2(-2)^{2}+2\left(-2\right)-4=8-4-4=0$

Donc la forme factorisée de $f(x)$ est

$$f\left(x\right)=2(x-1)(x-\left(-2\right))$$

$$f\left(x\right)=2(x-1)(x+2)$$

### Une racine évidente

Soit $f\left(x\right)=2x^{2}-x-3$

$-1$ est une racine évidente car $2(-1)^{2}-\left(-1\right)-3=2+1-3=0$.

On ne trouve pas une 2ième racine évidente. On utilise :

$$x\_{1} × x\_{2} =\frac{c}{a}$$

Puisque $x\_{1}=-1$ donc

$$-1 × x\_{2} =\frac{-3}{2}$$

$$x\_{2}=\frac{3}{2}$$

Donc la forme factorisée de $f(x)$ est

$$f\left(x\right)=2\left(x+1\right)\left(x-\frac{3}{2}\right).$$

## Signe d’un polynôme du second degré factorisé

Déterminer le signe de $f\left(x\right)=2x^{2}-x-3$ dont la forme factorisée est

$$f\left(x\right)=2(x+1)(x-\frac{3}{2})$$

# Racines, factorisation, équation, inéquation : formules générales

## Résoudre une équation du second degré



* **Démonstration page 54. Correction de la question 5 :**

$f\left(x\right)=0$ équivaut successivement à $a\left(x-α\right)^{2}+β=0$ $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}-\frac{Δ}{4a^{2}}\right)=0$

$a=0$ ou $\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}-\frac{Δ}{4a^{2}}\right)=0$

La première possibilité est exclue, étant donné que $a\ne 0$. Donc $f\left(x\right)=0$ équivaut à

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}-\frac{Δ}{4a^{2}}=0$ soit encore à $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}=\frac{Δ}{4a^{2}}$

1er cas : $Δ<0$

Dans l'égalité $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}=\frac{Δ}{4a^{2}}$ , le membre de gauche est positif ou nul, alors que le membre de droite est strictement négatif. C'est impossible.

Donc l'équation $f\left(x\right)=0$ n'a pas de solution.

2ème cas : $∆ =0$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}=\frac{Δ}{4a^{2}}$ équivaut successivement à $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}=0$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$ ou $\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$ $x=-\frac{b}{2a}$ ou $x=-\frac{b}{2a}$

Donc l'équation $f\left(x\right)=0$ a une solution double $x\_{0}=-\frac{b}{2a}$

## Applications directes

Résoudre dans $R$ les équations suivantes :

$-3x^{2}+4x-1=0$.

$3x^{2}-18x+27=0$.

$-2x^{2}+x-4=0$.


## Exercice de recherche

Le lycée d’Avesnières souhaite créer un logo correspondant au carré ABCD de côté 10 *cm*.

On a IJ = OP = *x*. Pour des raisons d’esthétisme, on souhaite que l’aire de la croix hachurée soit égale à la moitié de l’aire du carré ABCD.

Calculer la valeur de *x* qui permet de répondre à cette demande.

## Signe d’un polynôme du second degré et résolution d’inéquation

a/ Méthode pour dresser le tableau de signe de $ax^{2}+bx+c$ :



b/ Compléter le tableau avec l’étude précédente et dresser les tableaux de signe pour chacun des polynômes :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Polynôme du 2nd degré | Discriminant | Racines | Tableau de signes |
| $$-3x^{2}+4x-1$$ |  |  |  |
| $$3x^{2}-18x+27$$ |  |  |  |
| $$-2x^{2}+x-4$$ |  |  |  |

## Résoudre une inéquation du second degré

a/ Application directe :

Résoudre sur $R$, l’inéquation $-x^{2}+4x+5\geq 0$

b/ Exercice de recherche :

Lorsque ce panneau solaire photovoltaïque fait un angle *x* (en degré) avec l’horizontale pendant une année, la quantité d’énergie (en kWh) reçue annuellement par le panneau est alors :

*x*

$E\left(x\right)=-0,2x^{2}+12,6x+1800$ avec $x\in \left[0 ;90\right]$.

1/ Calculer l’angle qui permet de recevoir une quantité d’énergie annuelle maximale. Que vaut cette quantité ?

2/ Déterminer l’inclinaison (angle *x*) qui permet de recevoir une quantité d’énergie annuelle égale à 1700 kWh. On donnera la valeur arrondie à $10^{-2}$ près.

3/ Déterminer toutes les inclinaisons qui permettent de recevoir, annuellement, une quantité d’énergie supérieure ou égale à 1500 kWh.

## Factoriser un polynôme du second degré



Compléter le tableau avec l’étude précédente et donner la forme factorisée des polynômes si possible :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Polynôme du 2nd degré | Discriminant | Racines | Forme factorisée |
| $$-3x^{2}+4x-1$$ |  |  |  |
| $$3x^{2}-18x+27$$ |  |  |  |
| $$-2x^{2}+x-4$$ |  |  |  |