CHAPITRE 6 : Produit scalaire

CHAPITRE 6 : produit scalaire

1 Produit scalaire

1.1 Définition du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **non nuls**,

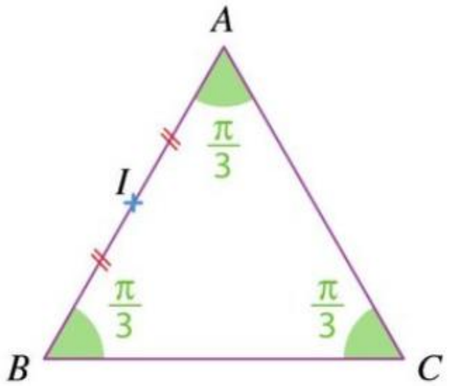
$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Si l'un des vecteurs est le vecteur nul alors le produit scalaire est égal à zéro :
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u}.\vec{0} = \vec{0}.\vec{v} = 0$$

<u>Exemple :</u>

Soit un triangle équilatéral ABC de côté 2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.



Le triangle a pour côté 2 donc $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = 2$.

D'autre part $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Donc le produit scalaire :

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 2 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{3}$$

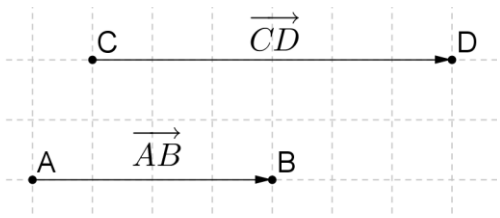
$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 4 \times \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 2$$

1.2 Vecteurs colinéaires et carré scalaire

- Cas de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires et de **même sens** :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| \times \|\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}\| \times \boldsymbol{cos}(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}},\overrightarrow{\boldsymbol{CD}})$$



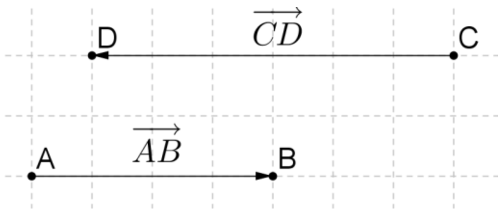
Or $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 0$ et $\cos(0) = 1$

Donc

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| \times \|\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}\|$$

- Cas de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires et de **sens contraires** :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| \times \|\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}\| \times \boldsymbol{cos}(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}},\overrightarrow{\boldsymbol{CD}})$$



Or $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \pi$ et $\cos(\pi) = -1$

Donc

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} = -\|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| \times \|\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}\|$$

<u>Conclusion :</u>

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires et de même sens**, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times CD$
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires et de sens contraires**, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB \times CD$

<u>Remarque :</u>

Pour tous points A et B du plan : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$

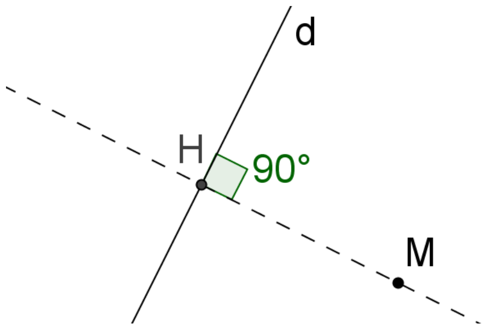
- Le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même est appelé **carré scalaire de $\vec{u}$** et est noté $\vec{u}^2$:

Pour tout vecteur $\vec{u}$: $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

1.3 Projection orthogonale et vecteurs orthogonaux

Définition :

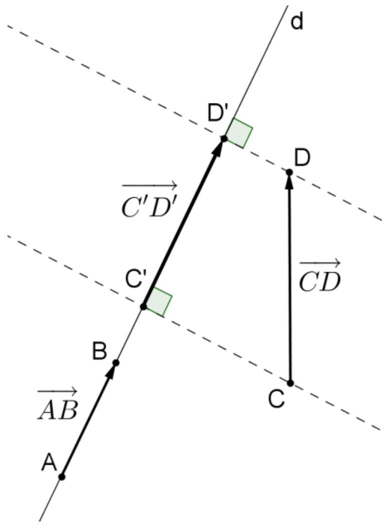
Le **projeté orthogonal $\boldsymbol{H}$** d'un point M **sur une droite $\boldsymbol{d}$** est le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite d passant par M avec la droite d.



Propriété :

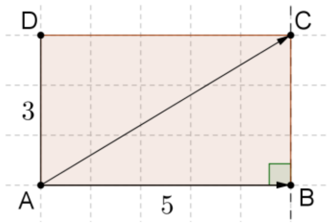
Soit les points A, B, C, et D, avec A et B distincts.
Soit C' et D' les projetés orthogonaux des points C et D sur la droite (AB). Alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$$



Conséquence :

Pour calculer un produit scalaire, on peut remplacer **l'un des deux** vecteurs par son projeté orthogonal **sur la direction de l'autre**.



Exemple :

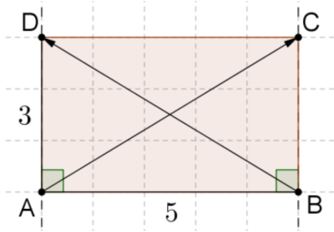
Dans le rectangle $ABCD$, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 25$$

Pour calculer un produit scalaire, on ne peut pas remplacer **les deux** vecteurs par leurs projetés orthogonaux **sur la direction d'un troisième**.



Exemple :

Dans le rectangle $ABCD$, on n'a pas :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}$$

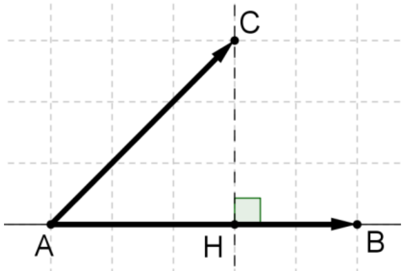
Mais on a : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$$

Propriété :

Soit trois points A, B et C tels que A et B soient distincts.

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB)



Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}}$$

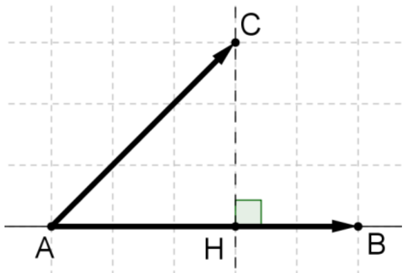
Démonstration :

C'est un cas particulier de la propriété précédente car A a pour projeté lui-même.

Remarques :

- Si H appartient à la demi-droite $[AB)$, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens, donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH$$

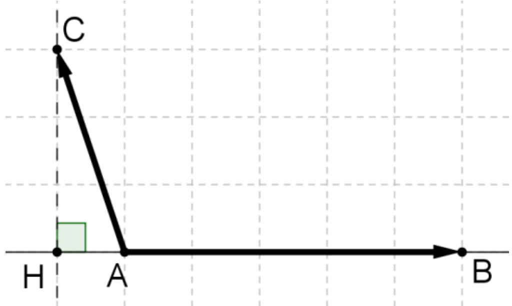


Conséquence :

Si l'angle $\widehat{BAC}$ est **aigu**, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$

- Si H n'appartient pas à la demi-droite $[AB)$, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens contraires, donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -AB \times AH$$



Conséquence :

Si l'angle $\widehat{BAC}$ est **obtus**, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} < 0$

Propriété :

$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \mathbf{0}}$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**.

2 Propriétés du produit scalaire

2.1 Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

- Le produit scalaire est **symétrique** :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

- Le produit scalaire est **linéaire à droite** :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et les réels k_1 et k_2 on a : $\vec{u}.(k_1\vec{v} + k_2\vec{w}) = k_1\vec{u}.\vec{v} + k_2\vec{u}.\vec{w}$

- Le produit scalaire est **linéaire à gauche** :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et les réels k_1 et k_2 on a : $(k_1\vec{u} + k_2\vec{v}).\vec{w} = k_1\vec{u}.\vec{w} + k_2\vec{v}.\vec{w}$

<u>Exemples :</u>

$$(3\vec{u} + 2\vec{v}).\vec{w} = 3\vec{u}.\vec{w} + 2\vec{v}.\vec{w}$$

$$\vec{a}.\left(3\vec{b} - 5\vec{c}\right) = 3\vec{a}.\vec{b} - 5\vec{a}.\vec{c}$$

$$\vec{s}.\left(3\vec{s} + 8\vec{t}\right) = 3\vec{s}^2 + 8\vec{s}.\vec{t} = 3\|\vec{s}\|^2 + 8\vec{s}.\vec{t}$$

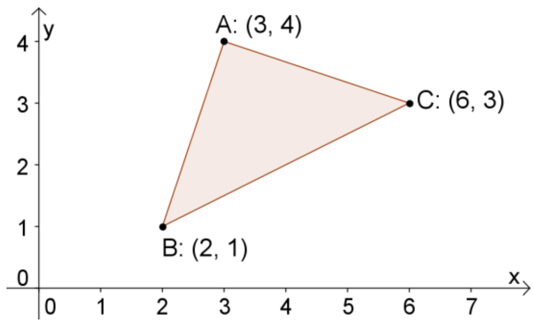
2.2 Produit scalaire dans une base orthonormée

Soit une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Alors : $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$ $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormée du plan signifie que $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$ et que $\|\vec{\imath}\| = 1$ et $\|\vec{\jmath}\| = 1$.

<u>Exemple</u>

Soit trois points $A(3; 4)$, $B(2; 1)$ et $C(6; 3)$ dans un repère orthonormé.

Démontrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.



Réponse :

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-3\\1-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6-3\\3-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

- $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

Donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$. Donc ABC est isocèle en A.

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-1)(3) + (-3)(-1) = 0$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc ABC est rectangle en A.

2.3 Norme et produit scalaire

Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a, d'après la remarque du §1.2 :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$$

et donc :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$

Ainsi :

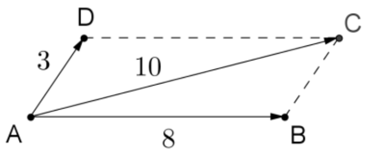
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\vec{u}.\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)}$$

Exemples :

- Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$



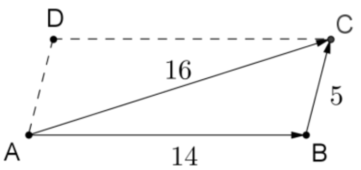
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(10^2 - 8^2 - 3^2)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{27}{2}$$

- Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(16^2 - 14^2 - 5^2)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{35}{2}$$

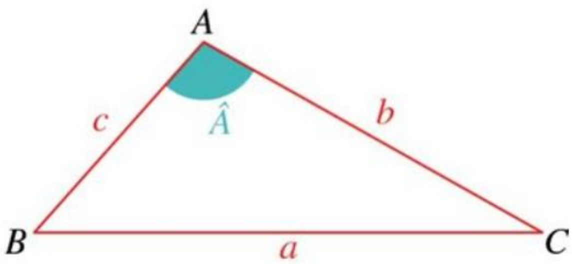
3 Applications du produit scalaire

3.1 Formule d'Al-Kashi

Al-Kashi : Mathématicien Perse du début du $15^{ème}$ siècle.

Dans un triangle ABC, avec les notations de la figure ci-contre, on a :

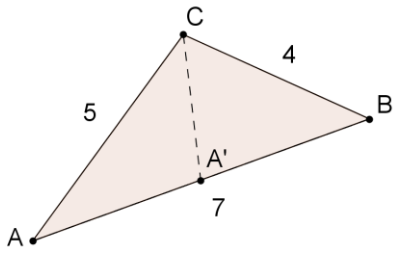
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$



Applications :
Cette formule permet de calculer les angles connaissant les trois côtés.

Exemple :
Calculer l'angle $\hat{A}$.
Réponse :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$2bc\cos\hat{A} = b^2 + c^2 - a^2$$
$$\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos\hat{A} = \frac{5^2 + 7^2 - 4^2}{2\times 5\times 7}$$
$$\cos\hat{A} = \frac{5^2 + 7^2 - 4^2}{2\times 5\times 7}$$
$$\cos\hat{A} = \frac{29}{35}$$
$$\hat{A} = \cos^{-1}\frac{29}{35}$$
$$\hat{A} \approx 34{,}05°$$



3.2 Cercle défini par un diamètre

Propriété :

Un point $M(x\,;y)$ appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$ et seulement si :

$$\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$$

Exemple :
Soit les points $A(1\,;2)$ et $B(-2\,;\ 3)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.
Déterminer une équation du cercle C de diamètre $[AB]$.

Réponse :

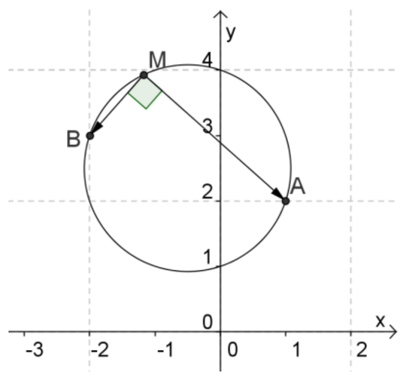
- $M(x\,;y)\ \in\ C$

équivaut successivement à :

- $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$

$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-2-x\\3-y\end{pmatrix}$

- $(1-x)(-2-x) + (2-y)(3-y) = 0$
- $-2 - x + 2x + x^2 + 6 - 2y - 3y + y^2 = 0$
- $x^2 + y^2 + x - 5y + 4 = 0$



Conclusion : Le cercle C de diamètre $[AB]$ a comme équation $\boxed{x^2 + y^2 + x - 5y + 4 = 0}$