Chapitre 7

Variables aléatoires – COURS

[1. Variable aléatoire 2](#_Toc14420051)

[Exemple 2](#_Toc14420052)

[Définitions 2](#_Toc14420053)

[Exemple 2](#_Toc14420054)

[Définition 2](#_Toc14420055)

[2. Loi de probabilité d’une variable aléatoire 2](#_Toc14420056)

[2.1 Exemples 2](#_Toc14420057)

[2.1.1 Exemple 1 avec un tableau 2](#_Toc14420058)

[2.1.2 Exemple 2 avec un arbre 3](#_Toc14420059)

[2.2 Définition d'une loi de probabilité de variable aléatoire 4](#_Toc14420060)

[3. Paramètres d’une variable aléatoire 5](#_Toc14420061)

[3.1 Espérance mathématique d'une variable aléatoire 5](#_Toc14420062)

[3.2 Variance et écart type d'une variable aléatoire 5](#_Toc14420063)

[3.2.1 Comment quantifier la dispersion d'une variable aléatoire ? 5](#_Toc14420064)

[3.2.2 Définition de la variance d'une variable aléatoire 7](#_Toc14420065)

[3.2.3 Définition de l'écart type d'une variable aléatoire 8](#_Toc14420066)

# Variable aléatoire

#### Exemple

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat."

L'ensemble de toutes les issues possibles s'appelle l'univers des possibles.

On considère l'événement : "On obtient un résultat pair." On a donc : .

On considère l'événement élémentaire : "On obtient un 3". On a donc : .

#### Définitions

* Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle une issue.
* L'univers des possibles est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
* Un événement est un sous-ensemble de l'univers des possibles.
* Un événement élémentaire est un événement contenant une seule issue.

#### Exemple

Dans l'expérience précédente, on considère le jeu suivant :

* Si le résultat est pair, on gagne .
* Si le résultat est , on gagne .
* Si le résultat est ou , on perd .

On a défini ainsi une variable aléatoire sur qui peut prendre les valeurs ou .

On a donc :

#### Définition

Une variable aléatoire est une fonction définie sur un univers et à valeur dans ℝ.

# Loi de probabilité d’une variable aléatoire

## Exemples

#### Exemple 1 avec un tableau

On dispose de deux dés cubiques bien équilibrés : un rouge et un vert notés et . On lance les deux dés et on note le résultat de chaque dé. Par exemple, un résultat pourra être .

Le jeu suivant est organisé :

Un joueur lance les dés.

* Si aucun dé ne fait , le joueur perd .
* Si un seul des deux dés fait , le joueur gagne .
* Si les deux dés font , le joueur gagne.

1. Déterminer l'ensemble de toutes les issues possibles.
2. Donner la loi de probabilité du gain algébrique[[1]](#footnote-1) du joueur.

***Réponse :***

1. Comme il y a deux dés indépendants, un tableau à double entrée permet de représenter toutes les issues possibles. Dans chaque cellule du tableau, on écrit le gain algébrique obtenu.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Dé vert  Dé rouge |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

L'ensemble des 3 résultats provenant de cette expérience aléatoire est :

1. La loi de probabilité du gain à ce jeu est résumée dans le tableau suivant :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Valeurs du gain | -3 € | 2 € | 5 € | TOTAL |
| Probabilité |  |  |  | 1 |

#### 

#### Exemple 2 avec un arbre

Une boîte contient trois billes jaunes, une bille verte et une bille noire.

Un jeu consiste à tirer au hasard une bille de la boîte et, sans la remettre, à tirer une seconde bille. On s'intéresse au nombre de billes jaunes obtenues.

1. Déterminer l'ensemble de toutes les issues possibles.
2. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire « nombre de billes jaunes obtenues ».

***Réponse :***

1. On peut faire un arbre pour représenter toutes les issues possibles. Au bout de chaque branche, on écrit le nombre de billes jaunes obtenues.

|  |  |
| --- | --- |
| 10tescours5p1.jpg | L'ensemble des 3 résultats provenant de cette expérience aléatoire est : |

1. Calcul des probabilités

La probabilité de n'obtenir aucune bille jaune est :

La probabilité d'obtenir une bille jaune est :

La probabilité d'obtenir deux billes jaunes est :

On fait un tableau pour donner la loi de probabilité du nombre de billes jaunes obtenues :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Nombre de billes jaunes obtenues | 0 | 1 | 2 | TOTAL |
| Probabilité |  |  |  | 1 |

## Définition d'une loi de probabilité de variable aléatoire

Soit l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

Lorsqu'on répète l'expérience un grand nombre de fois, la distribution des fréquences observées tend vers la distribution des fréquences théoriques.

Cette distribution des fréquences théoriques est appelée **loi de probabilité**.

***Etablir la loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est :***

* Déterminer l'ensemble de toutes les issues possibles de l'expérience
* Calculer les probabilités correspondantes
* Résumer dans un tableau les résultats :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Valeurs possibles de la variable aléatoire |  |  |  |  | TOTAL |
| Probabilité correspondantes |  |  |  |  | 1 |

# 

# Paramètres d’une variable aléatoire

## Espérance mathématique d'une variable aléatoire

***Définition :***

L'espérance mathématique d’une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité est la moyenne :

|  |  |
| --- | --- |
| On écrit aussi sous forme condensée : |  |

***Exemple :***

On considère le jeu du tirage successif de deux billes sans remise, vu au paragraphe 2.1.2.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Nombre de billes jaunes obtenues | 0 | 1 | 2 | TOTAL |
| Probabilité |  |  |  | 1 |

L'espérance de cette loi de probabilité est :

* Interprétation de l'espérance :

Le nombre moyen de billes jaunes obtenu à chaque partie tend vers 1,2 lorsqu'on fait tendre le nombre de parties vers l'infini.

## Variance et écart type d'une variable aléatoire

#### Comment quantifier la dispersion d'une variable aléatoire ?

***Exemple :***

Deux joueurs A et B disposent chacun de et décident de jouer cette somme au casino, au jeu de la roulette. La roulette comporte numéros. sont noirs, sont rouges, est vert.

* Le joueur A choisit la méthode suivante :

Il mise ses sur le noir. Si la bille s'arrête sur le noir, il gagne . Si la bille s'arrête sur le rouge ou le vert, il ne gagne rien.

* Le joueur B choisit la méthode suivante :

Il mise ses sur le n°23. Si la bille s'arrête sur le n° 23, il gagne . Si la bille s'arrête sur un autre numéro, il ne gagne rien.

1. Pour le joueur A :
   1. Donner l'ensemble des gains algébriques possibles.
   2. Déterminer la loi de probabilité de
   3. Calculer l'espérance mathématique du gain.
2. Pour le joueur B :
   1. Donner l'ensemble des gains algébriques possibles.
   2. Déterminer la loi de probabilité de
   3. Calculer l'espérance mathématique du gain.
3. Pour lequel des deux joueurs ce jeu est-il le plus risqué ?

***Réponse :***

1. Pour le joueur A :
   1. Le gain algébrique est :

* S'il gagne :
* S'il perd :
  1. La loi de probabilité de est résumée dans le tableau suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | TOTAL |
|  |  |  | 1 |

* 1. L'espérance du gain est :

S'il répète un très grand nombre de fois ce jeu, le joueur A perdra en moyenne par partie.

1. Pour le joueur B :
   1. Le gain algébrique est :

* S'il gagne :
* S'il perd :
  1. La loi de probabilité de est résumée dans le tableau suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | TOTAL |
|  |  |  | 1 |

* 1. L'espérance du gain est :

S'il répète un très grand nombre de fois ce jeu, le joueur B perdra en moyenne par partie.

1. Bien que l'espérance mathématique du gain soit la même pour les deux joueurs, on peut voir que, sur une partie, le joueur B prend plus de risques que le joueur A.

Mathématiquement, on peut quantifier ce risque en calculant **la variance** de la loi de probabilité : c'est la moyenne des **carrés des écarts** entre les valeurs , , … , et l'espérance

#### Définition de la variance d'une variable aléatoire

***Exemple :***

Calculer la variance des variables aléatoires précédentes

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | -1000 | 1000 | TOTAL |
|  |  |  | 1 |

Espérance mathématique :

La variance :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | -1000 | 35000 | TOTAL |
|  |  |  | 1 |

Espérance mathématique :

La variance :

La variance est nettement supérieure à la variance ca qui traduit un risque nettement plus élevé pour le joueur B.

***Définition 1 :***

La variance d'une loi de probabilité est la moyenne :

|  |  |
| --- | --- |
| On écrit aussi sous forme condensée : |  |

***Définition 2 :***

On démontre que la variance d'une loi de probabilité est la moyenne des carrés moins l'espérance au carré :

|  |  |
| --- | --- |
| On écrit aussi sous forme condensée : |  |

***Exemple :***

Calculer la variance par la deuxième définition :

#### Définition de l'écart type d'une variable aléatoire

Etant donné sa formule de calcul, la variance n'est pas dans la même unité que les valeurs mais dans cette unité au carré. Par exemple

On définit un autre paramètre de dispersion, l'écart type :

***Exemple :***

Calculer l'écart type des lois de probabilité du gain des joueurs A et B.

***Réponse :***

* Pour le gain de A, la variance est

L'écart type est donc :

* Pour le gain de B, la variance est

L'écart type est donc :

***Remarques***

* La variance et l'écart type sont toujours positifs.
* Un jeu d'argent est dit équitable, si l'espérance du gain algébrique .

1. Gain algébrique : gain qui peut être positif ou négatif [↑](#footnote-ref-1)