

Chapitre 7

Variables aléatoires – COURS

1.	Variable aléatoire.....	2
	Exemple.....	2
	Définition.....	2
	Exemple.....	2
	Définition.....	2
2.	Loi de probabilité d'une variable aléatoire	2
2.1	Exemples	2
2.1.1	Exemple 1 avec un tableau	2
2.1.2	Exemple 2 avec un arbre.....	3
2.2	Définition d'une loi de probabilité de variable aléatoire.....	4
3.	Paramètres d'une variable aléatoire.....	5
3.1	Espérance mathématique d'une variable aléatoire.....	5
3.2	Variance et écart type d'une variable aléatoire.....	5
3.2.1	Comment quantifier la dispersion d'une variable aléatoire ?	5
3.2.2	Définition de la variance d'une variable aléatoire	7
3.2.3	Définition de l'écart type d'une variable aléatoire	8

1. Variable aléatoire

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat."

L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles.

On considère l'événement A : "On obtient un résultat pair." On a donc : $A = \{2; 4; 6\}$.

On considère l'événement élémentaire E : "On obtient un 3". On a donc : $E = \{3\}$.

Définitions

- Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle une issue.
- L'univers des possibles est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
- Un événement est un sous-ensemble de l'univers des possibles.
- Un événement élémentaire est un événement contenant une seule issue.

Exemple

Dans l'expérience précédente, on considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2 €.
- Si le résultat est 1, on gagne 3 €.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 €.

On a défini ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou -4 .

On a donc : $X(1) = 3$; $X(2) = 2$; $X(3) = -4$; $X(4) = 2$; $X(5) = -4$; $X(6) = 2$

Définition

Une variable aléatoire X est une fonction définie sur un univers Ω et à valeur dans \mathbb{R} .

2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

2.1 Exemples

2.1.1 Exemple 1 avec un tableau

On dispose de deux dés cubiques bien équilibrés : un rouge et un vert notés R et V . On lance les deux dés et on note le résultat de chaque dé. Par exemple, un résultat pourra être $(R1 ; V4)$.

Le jeu suivant est organisé :

Un joueur lance les dés.

- Si aucun dé ne fait 6, le joueur perd 3 €.
 - Si un seul des deux dés fait 6, le joueur gagne 2 €.
 - Si les deux dés font 6, le joueur gagne 5 €.
1. Déterminer l'ensemble E de toutes les issues possibles.
 2. Donner la loi de probabilité du gain algébrique¹ du joueur.

¹ Gain algébrique : gain qui peut être positif ou négatif

Réponse :

1. Comme il y a deux dés indépendants, un tableau à double entrée permet de représenter toutes les issues possibles. Dans chaque cellule du tableau, on écrit le gain algébrique obtenu.

Dé vert Dé rouge	1	2	3	4	5	6
1	-3	-3	-3	-3	-3	2
2	-3	-3	-3	-3	-3	2
3	-3	-3	-3	-3	-3	2
4	-3	-3	-3	-3	-3	2
5	-3	-3	-3	-3	-3	2
6	2	2	2	2	2	5

L'ensemble des 3 résultats provenant de cette expérience aléatoire est : $E = \{-3 ; 2 ; 5\}$

2. La loi de probabilité du gain à ce jeu est résumée dans le tableau suivant :

Valeurs du gain	-3 €	2 €	5 €	TOTAL
Probabilité	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

2.1.2 Exemple 2 avec un arbre

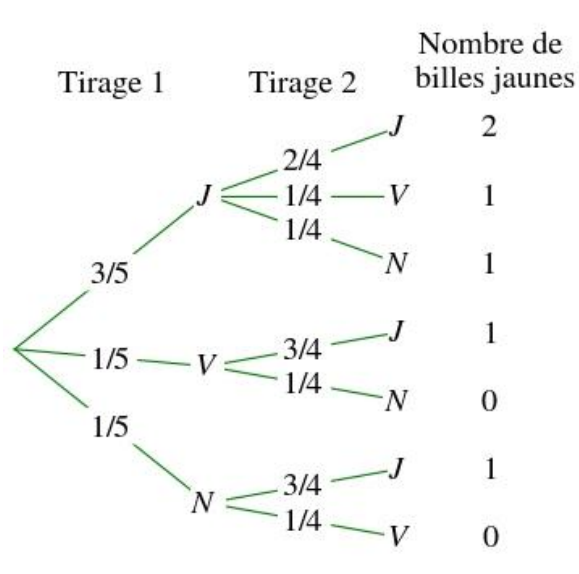
Une boîte contient trois billes jaunes, une bille verte et une bille noire.

Un jeu consiste à tirer au hasard une bille de la boîte et, sans la remettre, à tirer une seconde bille. On s'intéresse au nombre de billes jaunes obtenues.

1. Déterminer l'ensemble E de toutes les issues possibles.
2. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire « nombre de billes jaunes obtenues ».

Réponse :

1. On peut faire un arbre pour représenter toutes les issues possibles. Au bout de chaque branche, on écrit le nombre de billes jaunes obtenues.



L'ensemble des 3 résultats provenant de cette expérience aléatoire est :

$$E = \{0 ; 1 ; 2\}$$

2. Calcul des probabilités

La probabilité de n'obtenir aucune bille jaune est :

$$\left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

La probabilité d'obtenir une bille jaune est :

$$\left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{3}{4}\right) = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$$

La probabilité d'obtenir deux billes jaunes est :

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

On fait un tableau pour donner la loi de probabilité du nombre de billes jaunes obtenues :

Nombre de billes jaunes obtenues	0	1	2	TOTAL
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

2.2 Définition d'une loi de probabilité de variable aléatoire

Soit E l'ensemble des n résultats d'une expérience aléatoire.

$$E = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$$

Lorsqu'on répète l'expérience un grand nombre de fois, la distribution des fréquences observées tend vers la distribution des fréquences théoriques.

Cette distribution des fréquences théoriques est appelée **loi de probabilité**.

Etablir la loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est :

- Déterminer l'ensemble E de toutes les issues possibles de l'expérience $x_1; x_2; \dots; x_n$
- Calculer les probabilités correspondantes $p_1; p_2; \dots; p_n$
- Résumer dans un tableau les résultats :

Valeurs possibles de la variable aléatoire	x_1	x_2	...	x_n	TOTAL
Probabilité correspondantes	p_1	p_2	...	p_n	1

3. Paramètres d'une variable aléatoire

3.1 Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Définition :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi de probabilité est la moyenne :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + p_3 \times x_3 + \dots + p_n \times x_n$$

On écrit aussi sous forme condensée :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i$$

Exemple :

On considère le jeu du tirage successif de deux billes sans remise, vu au paragraphe 2.1.2.

Nombre de billes jaunes obtenues	0	1	2	TOTAL
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

L'espérance de cette loi de probabilité est :

$$E(X) = \frac{1}{10} \times 0 + \frac{6}{10} \times 1 + \frac{3}{10} \times 2 \qquad E(X) = \frac{12}{10} \qquad E(X) = 1,2$$

- Interprétation de l'espérance :

Le nombre moyen de billes jaunes obtenu à chaque partie tend vers 1,2 lorsqu'on fait tendre le nombre de parties vers l'infini.

3.2 Variance et écart type d'une variable aléatoire

3.2.1 Comment quantifier la dispersion d'une variable aléatoire ?

Exemple :

Deux joueurs A et B disposent chacun de 1000 € et décident de jouer cette somme au casino, au jeu de la roulette. La roulette comporte 37 numéros. 18 sont noirs, 18 sont rouges, 1 est vert.

- Le joueur A choisit la méthode suivante :

Il mise ses 1000 € sur le noir. Si la bille s'arrête sur le noir, il gagne 2000 €. Si la bille s'arrête sur le rouge ou le vert, il ne gagne rien.

- Le joueur B choisit la méthode suivante :

Il mise ses 1000 € sur le n°23. Si la bille s'arrête sur le n° 23, il gagne 36000 €. Si la bille s'arrête sur un autre numéro, il ne gagne rien.

1) Pour le joueur A :

- a) Donner l'ensemble des gains algébriques X_A possibles.
- b) Déterminer la loi de probabilité de X_A
- c) Calculer l'espérance mathématique $E(X_A)$ du gain.

- 2) Pour le joueur B :
- Donner l'ensemble des gains algébriques X_B possibles.
 - Déterminer la loi de probabilité de X_B
 - Calculer l'espérance mathématique $E(X_B)$ du gain.
- 3) Pour lequel des deux joueurs ce jeu est-il le plus risqué ?

Réponse :

- 1) Pour le joueur A :

- Le gain algébrique est :
 - S'il gagne : $-1000 + 2000 = +1000$ €
 - S'il perd : $-1000 + 0 = -1000$ €

$$X_A \in \{-1000 ; 1000\}$$

- La loi de probabilité de X_A est résumée dans le tableau suivant :

x_i	-1000	1000	TOTAL
$P(X_A = x_i)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$	1

- L'espérance du gain est :

$$E(X_A) = \frac{19}{37} \times -1000 + \frac{18}{37} \times 1000$$

$$E(X_A) = -\frac{19000}{37} + \frac{18000}{37} \quad E(X_A) = -\frac{1000}{37} \quad E(X_A) \approx -27,03 \text{ €}$$

S'il répète un très grand nombre de fois ce jeu, le joueur A perdra en moyenne 27,03 € par partie.

- 2) Pour le joueur B :

- Le gain algébrique est :
 - S'il gagne : $-1000 + 36000 = +35000$ €
 - S'il perd : $-1000 + 0 = -1000$ €

$$X_B \in \{-1000 ; 35000\}$$

- La loi de probabilité de X_B est résumée dans le tableau suivant :

x_i	-1000	35000	TOTAL
$P(X_B = x_i)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$	1

- L'espérance du gain est :

$$E(X_B) = \frac{36}{37} \times -1000 + \frac{1}{37} \times 35000$$

$$E(X_B) = -\frac{36000}{37} + \frac{35000}{37} \quad E(X_B) = -\frac{1000}{37} \quad E(X_B) \approx -27,03 \text{ €}$$

S'il répète un très grand nombre de fois ce jeu, le joueur B perdra en moyenne 27,03 € par partie.

- 3) Bien que l'espérance mathématique du gain soit la même pour les deux joueurs, on peut voir que, sur une partie, le joueur B prend plus de risques que le joueur A.

Mathématiquement, on peut quantifier ce risque en calculant **la variance** de la loi de probabilité : c'est la moyenne des **carrés des écarts** entre les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n et l'espérance $E(X)$

3.2.2 Définition de la variance d'une variable aléatoire

Exemple :

Calculer la variance des variables aléatoires précédentes

x_i	-1000	1000	TOTAL
$P(X_A = x_i)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$	1

Espérance mathématique :

$$E(X_A) = -\frac{1000}{37} \text{ €}$$

La variance :

$$V(X_A) = \frac{19}{37} \times \left(-1000 - \left(-\frac{1000}{37}\right)\right)^2 + \frac{18}{37} \times \left(1000 - \left(-\frac{1000}{37}\right)\right)^2$$

$$V(X_A) \approx 999\,269,54$$

x_i	-1000	35000	TOTAL
$P(X_B = x_i)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$	1

Espérance mathématique :

$$E(X_B) = -\frac{1000}{37} \text{ €}$$

La variance :

$$V(X_B) = \frac{36}{37} \times \left(-1000 - \left(-\frac{1000}{37}\right)\right)^2 + \frac{1}{37} \times \left(35000 - \left(-\frac{1000}{37}\right)\right)^2$$

$$V(X_B) \approx 34\,080\,350,62$$

La variance $V(X_B)$ est nettement supérieure à la variance $V(X_A)$ ce qui traduit un risque nettement plus élevé pour le joueur B.

Définition 1 :

La variance d'une loi de probabilité est la moyenne :

$$V(X) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + p_2 \times (x_2 - E(X))^2 + p_3 \times (x_3 - E(X))^2 + \dots + p_n \times (x_n - E(X))^2$$

On écrit aussi sous forme condensée :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i \times (x_i - E(X))^2$$

Définition 2 :

On démontre que la variance d'une loi de probabilité est la moyenne des carrés moins l'espérance au carré :

$$V(X) = p_1 \times (x_1)^2 + p_2 \times (x_2)^2 + p_3 \times (x_3)^2 + \dots + p_n \times (x_n)^2 - E(X)^2$$

On écrit aussi sous forme condensée :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (p_i \times (x_i)^2) - E(X)^2$$

Exemple :

Calculer la variance $V(X_B)$ par la deuxième définition :

$$V(X_B) = \frac{36}{37} \times (-1000)^2 + \frac{1}{37} \times (35000)^2 - \left(-\frac{1000}{37}\right)^2 \quad V(X_B) \approx 34\,080\,350,62$$

3.2.3 Définition de l'écart type d'une variable aléatoire

Etant donné sa formule de calcul, la variance n'est pas dans la même unité que les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n mais dans cette unité au carré. Par exemple $V_B \approx 34\,080\,350,62 \text{ €}^2$

On définit un autre paramètre de dispersion, l'écart type :

$$\sigma(X_B) = \sqrt{V(X_B)}$$

Exemple :

Calculer l'écart type des lois de probabilité du gain des joueurs A et B.

Réponse :

- Pour le gain de A, la variance est $V_A \approx 999\,269,54$

L'écart type est donc : $\sigma(X_A) = \sqrt{V(X_A)}$

$$\begin{aligned} \sigma(X_A) &\approx \sqrt{999269,54} \\ \sigma(X_A) &\approx 999,63 \text{ €} \end{aligned}$$

- Pour le gain de B, la variance est $V_B \approx 34\,080\,350,62$

L'écart type est donc : $\sigma(X_B) = \sqrt{V_B}$
 $\sigma(X_B) \approx \sqrt{34\,080\,350,62}$
 $\sigma(X_B) \approx 5837,84 \text{ €}$

Remarques

- La variance et l'écart type sont toujours positifs.
- Un jeu d'argent est dit équitable, si l'espérance du gain algébrique $E(X) = 0$.