Chapitre 8

Variations et courbes représentatives des fonctions

# Lien entre sens de variation de $f$ et signe de $f’$

## Théorème sur le sens de variation d’une fonction

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.

#### Propriété

* **Pour tout** $x\in I$$ f^{'}(x)>0$ équivaut à $f$ **est strictement croissante sur** $I$.
* **Pour tout** $x\in I f^{'}(x)<0$ équivaut à $f$ **est strictement décroissante sur** $I$.

##

## Caractérisation des fonctions constantes

#### Propriété

* **Pour tout** $x\in I $$f^{'}\left(x\right)=0$ équivaut à $f$ **est constante sur** $I$.

# Extrema d’une fonction

## Définitions

$f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$ et $c$ et $d$ des points de $I$ distincts de ses extrémités.

|  |  |
| --- | --- |
| $f$ admet un **maximum** sur $I$, atteint en $x=c$ signifie que : pour tout $x$ de $I$, $f(x)\leq f(c)$$f$ admet un **minimum** sur $I$, atteint en $x=d$ signifie que : pour tout $x$ de $I$, $f(x)\geq f(d)$ |  |

Dire que la fonction $f$ admet un **maximum local en** $c$ signifie que, pour tout $x$ d’un intervalle ouvert $I'$ contenant $c$ et inclus dans $I $: $f\left(x\right)\leq f\left(c\right)$.

Dire que la fonction $f$ admet un **minimum local en** $d$ signifie que, pour tout $x$ d’un intervalle ouvert $I'$ contenant $d$ et inclus dans $I$ : $f\left(x\right)\geq f\left(d\right)$.

On dit que $f$ admet un **extremum local** sur $I$ si $f$ admet un minimum local ou un maximum local sur $I$.

## Extremum local et nombre dérivé

#### Propriété

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$ et $a$ appartenant à $I$.

Si $f'$ s’annule en changeant de signe en $a$ alors $f$ admet un extremum local en $x=a$.

#### Exemple

La fonction $f:x⟼x^{2}$ a une dérivée qui s’annule en $0$ en changeant de signe puisque $f^{'}\left(x\right)=2x$. Donc $f$ admet un extremum local en $x=0$.



#### Contre-exemple

La fonction $f:x⟼x^{3}$ a une dérivée qui s’annule en $0$ mais qui ne change pas de signe puisque $f^{'}\left(x\right)=3x^{2}$. Donc $f$ n’admet pas d’extremum local en $x=0$. (Cependant la courbe $C\_{f}$ de la fonction cube a une tangente horizontale au point d’abscisse $0$ car $f^{'}\left(0\right)=0$)

#### Propriété

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$ et $a$ appartenant à $I$.

Si $f$ admet un extremum local en $x=a$, alors : $f'\left(a\right)=0$ et la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d’abscisse $a$ est parallèle à l’axe des abscisses.

## Extremum d’une fonction polynôme du second degré

#### Propriété

Soit $f$ la fonction polynôme du second degré définie sur $R$ par : $f\left(x\right)=ax²+bx+c$, avec $a\ne 0$.

La fonction $f$ admet un extremum en $: $

$$x\_{0}=-\frac{b}{2a}.$$

# Applications de la dérivation

## Etudier les variations d’une fonction et déterminer ses extrema

#### Exemple 1

Soit la fonction$ f$ définie sur ℝ par : $f\left(x\right)=x^{3}+\frac{9}{2}x^{2}-12x+5$

1. Etudier les variations de $f$ et dresser le tableau de variation.
2. Dans repère, représenter graphiquement la fonction $f$.

#### Exemple 2

La fonction *f* définie sur ℝ par : $f\left(x\right)=5x^{2}-3x+4$ admet-elle un extremum sur ℝ ?

## Résoudre un problème d’optimisation

#### Exemple

Parmi tous les rectangles de périmètre égal à $40$, déterminer ceux dont l’aire est la plus grande possible.

## Exploiter les variations d’une fonction pour établir une inégalité

#### Exemple

Soit $f$ définie sur $\left[-3 ;6\right]$ par : $f\left(x\right)=x^{3}-12x$.

1. Calculer $f^{'}(x)$. Dresser le tableau de variation de $f$.
2. Montrer que pour tout $x\in \left[-3 ;6\right]$, $x^{3}-12x+16\geq 0$

## Etudier la position relative de deux courbes représentatives

#### Méthode

Etudier la position de la courbe $C\_{f}$ par rapport à la courbe $C\_{g}$ revient à étudier le signe de différence $f\left(x\right)-g\left(x\right)$.

* Si, pour tout $x\in I$, $f\left(x\right)-g\left(x\right)>0$

 $f\left(x\right)>g\left(x\right)$

Alors la courbe $C\_{f}$ est au-dessus de la courbe $C\_{g}$.

* Si, pour tout $x\in I$, $f\left(x\right)-g\left(x\right)<0$

 $f\left(x\right)<g\left(x\right)$

Alors la courbe $C\_{f}$ est en-dessous de la courbe $C\_{g}$.

#### Exemple

Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur $\left[2 ; +\infty \right[$ par :

$$f\left(x\right)=x^{3} et g\left(x\right)=-5x+18.$$

 Etudier la position relative des courbes représentatives $C\_{f}$ et $C\_{g}$.

## Etudier une fonction polynôme du second degré

#### Exemple

Soit la fonction *f* définie sur $R$ par : $f\left(x\right)=2x^{2}-8x+1$.

1. Calculer la fonction dérivée de $f$.
2. Déterminer le signe de $f ’$ en fonction de $x$.
3. Dresser le tableau de variations de $f$.