

M^o82 p40

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 65 \\ u_{n+1} = 0,8u_n + 18 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) $u_1 = 0,8(u_0) + 18$ $u_1 = 0,8(65) + 18$ $u_1 = 70$
 $u_2 = 0,8(u_1) + 18$ $u_2 = 0,8(70) + 18$ $u_2 = 74$

2) $v_n = u_n - 90$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Pour montrer qu'une suite est géométrique, on peut montrer que $v_{n+1} = q v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Puisque $v_n = u_n - 90$ est vrai pour tout entier n alors c'est vrai aussi si on remplace l'entier n par l'entier suivant $n+1$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 90$$

Dans cette formule on remplace u_{n+1} par $0,8u_n + 18$ (puisque d'après la définition de la suite (u_n) on a égalité des deux valeurs).

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (0,8u_n + 18) - 90 \\ v_{n+1} &= 0,8u_n - 72 \end{aligned}$$

Dans cette formule on remplace u_n par son expression en fonction de v_n . Cette expression est déduite de $v_n = u_n - 90$
 $v_n + 90 = u_n$

D'où
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,8(v_n + 90) - 72 \\ v_{n+1} &= 0,8v_n + 72 - 72 \\ v_{n+1} &= 0,8v_n \end{aligned}$$
 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Ainsi la suite (v_n) est géométrique de 1^{er} terme v_0 , de raison $q = 0,8$

Pour calculer v_0 on utilise la formule

$$\begin{aligned} v_n &= u_n - 90 \\ v_0 &= u_0 - 90 \\ v_0 &= 65 - 90 \\ v_0 &= -25 \end{aligned}$$

b) Puisque la suite (v_n) est géométrique alors $\begin{aligned} v_n &= v_0 \times q^n \\ v_n &= -25 \times 0,8^n \end{aligned}$

On en déduit d'après $u_n = v_n + 90$ que $u_n = -25 \times 0,8^n + 90$

- 3) a) $u \leftarrow 65$
 $n \leftarrow 0$
 Tant que $u < 85$
 $n \leftarrow n + 1$
 $u \leftarrow 0,8u + 18$

b) A la fin de l'exécution de l'algorithme, la boucle tant que s'est terminée avec la valeur de n quand $u > 85$ la première fois. On peut soit faire la table des u_n soit programmer l'algorithme de Python. Dans les deux cas on trouve $n = 8$ (1)

c) Pour savoir vers quelle valeur semble tendre la recette mensuelle, il suffit de savoir vers quelle valeur tend le nombre d'abonnés.

Pour cela, on continue à descendre dans la table de la calculatrice.

Par exemple, après $n=30$ on obtient des valeurs de u_n qui semblent être aussi proche que l'on veut de 90.

n	$u(n)$			
30	89.969			
31	89.975			
32	89.98			
33	89.984			
34	89.987			
35	89.99			
36	89.992			
37	89.994			
38	89.995			
39	89.996			
40	89.997			

$n=40$

Donc, selon ce modèle, la recette mensuelle semble avoir pour limite $90 \times 52 = \underline{4680 \text{ €}}$