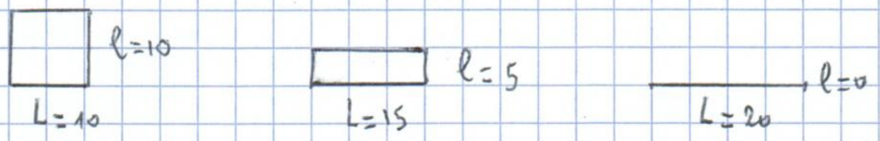
3.2 Resoudre un problème d'optimisation

On peut considérer plusieurs formes de rectangles d'aire A de longueur L et de largeur ℓ

$A = L \times \ell$ et le périmètre $2(L+\ell) = 40$



Pour savoir parmi tous les rectangles vérifiant $0 \leq \ell \leq 20$ et $0 \leq L \leq 20$ quel est celui qui a l'aire maximale, on étudie la fonction A définie par $A = L \times \ell$

Pour n'avoir qu'une seule variable, on exploite la relation

$$2(L+\ell) = 40$$
$$L+\ell = 20$$
$$L = 20-\ell$$

On remplace L par $20-\ell$ dans A. On obtient $A = (20-\ell)\times \ell$

$$A = 20\ell - \ell^2$$

Finalement $A(\ell) = -\ell^2 + 20\ell$

C'est une fonction polynôme du second degré équivalente à $f(x) = -x^2 + 20x$ sauf qu'elle s'appelle A et que la variable est ℓ au lieu de x.

A est dérivable pour tout $\ell \in [0;20]$

$A'(\ell) = -2\ell + 20$.

Pour connaître le signe de A' on résout par exemple $A'(\ell) > 0$

$$-2\ell + 20 > 0$$
$$20 > 2\ell$$
$$10 > \ell$$

D'où le tableau de signe de A' et de variations de A :

ℓ	0		10		20
signe de $A'(\ell)$		+	0	−	
variations de A	0	↗	100	↘	0

Avec la calculatrice, on calcule les extrema $Y_1(X) = -X^2 + 20X$

$Y_1(0) = 0$ $\quad Y_1(10) = 100$ $\quad Y_1(20) = 0$

Conclusion : le rectangle d'aire maximale est tel que $\ell = 10$

De plus $L + \ell = 20$ donc $L = 10$

Donc c'est le <u>carré de côté 10</u>.