3.3 Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité

1) f est définie pour tout réel x de l'intervalle $[-3;6]$ par
$f(x) = x^3 - 12x$

f est dérivable sur $[-3;6]$.
$f'(x) = 3x^2 - 12$
$f'(x) = 3(x^2-4)$
$f'(x) = 3(x-2)(x+2)$

Donc $f'(x)$ a deux racines -2 et 2.

x	-3		-2		2		6
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	16	↘		↗	144
	9				-16		

2) D'après le tableau de variations, la plus petite valeur atteinte par $f(x)$ est -16 (c'est le minimum global).

Donc, quel que soit $x \in [-3;6]$ on a $f(x) \geqslant -16$

Donc $x^3 - 12x \geqslant -16$

$x^3 - 12x + 16 \geqslant 0$

Donc on a prouvé que pour tout $x \in [-3;6]$, $\underline{x^3 - 12x + 16 \geqslant 0}$