III - Applications de la dérivation

1) Etudier les variations d'une fonction et déterminer ses extrema

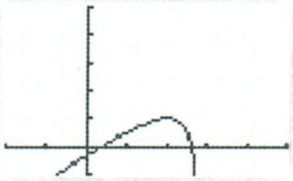
n° 45 p 164

45 CALCULATRICE

Un élève a représenté sur la calculatrice la fonction dont l'expression est la suivante :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}.$$

Il obtient la représentation graphique suivante.



1. A-t-il suffisamment d'informations pour donner le sens de variation de la fonction ?

2. a. Dériver la fonction à l'aide de la formule de dérivation du quotient.

b. Étudier le signe de la dérivée.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction et vérifier la réponse de la question **1**.

1. La courbe n'est tracée que sur $[-2 ; 3[$; on ne connaît pas le sens de variation pour $x > 3$.

Il manque des informations.

2. a) f est dérivable sur $]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$ comme fonction rationnelle.

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 3x + 1$

$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $\quad u'(x) = 2x - 3$

$v(x) = x - 3$

$v'(x) = 1$

pour $x \neq 3$ $\quad f'(x) = \frac{(2x-3)(x-3) - (x^2 - 3x + 1) \times 1}{(x-3)^2}$

$f'(x) = \frac{2x^2 - 6x - 3x + 9 - x^2 + 3x - 1}{(x-3)^2}$

$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$

b) étude du signe de $x^2 - 6x + 8$:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8$

$\Delta = 4$

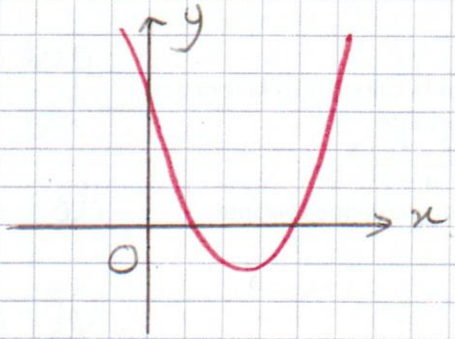
$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{6-\sqrt{4}}{2\times 1}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{6+\sqrt{4}}{2\times 1}$

$x_1 = 2$ $\qquad$ $x_2 = 4$

or : $a = 1 > 0$



D'où le signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
x^2-6x+8		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-3)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
variations de f		↗	1	↘	||	↘	5	↗	

$f(2) = \dfrac{2^2-3\times 2+1}{2-3}$ $\qquad$ $f(4) = \dfrac{4^2-3\times 4+1}{4-3}$

$f(2) = 1$ $\qquad$ $f(4) = 5$

on retrouve les résultats de la question 1