2) Résoudre un problème d'optimisation

n° 53 p 165

53 Bénéfice d'un artisan

Un artisan fabrique des objets. Il ne peut en produire plus de 70 par semaine.

Le coût de production, en euro, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 70] par :

$$C(x) = 0{,}01x^3 - 1{,}05x^2 + 91x + 225.$$

Chaque objet est vendu 80 euros.

1. a. Quel est le montant des coûts fixes pour cet artisan ?

b. Combien lui coûte la production de 25 objets ?

c. Vérifier que la fonction C est croissante sur l'intervalle [0 ; 70].

2. Le bénéfice, en euro, qu'il retire de la production et de la vente de x objets, est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle [0 ; 70].

a. Exprimer $B(x)$ en fonction de x.

b. Vérifier que $B(25) = 0$.

3. Étudier les variations de la fonction B sur l'intervalle [0 ; 70].

a. En déduire le nombre d'objets que l'artisan doit vendre et produire pour gagner de l'argent.

b. En déduire le nombre d'objets que l'artisan doit vendre et produire pour que son bénéfice soit maximal.

1\. a) $C(0) = 0{,}01 \times 0^3 - 1{,}5 \times 0^2 + 91 \times 0 + 225$

$C(0) = 225$

Les coûts fixes pour cet artisan sont de 225 €

b) $C(25) = 0{,}01 \times 25^3 - 1{,}05 \times 25^2 + 91 \times 25 + 22$

$C(25) = 2000$

La production de 25 objets coûte 2000 €.

c) C est dérivable sur $[0,70]$ comme fonction polynôme

Pour tout $x \in [0,70]$: $C'(x) = 0{,}01 \times 3x^2 - 1{,}05 \times 2x + 91$

$C'(x) = 0{,}03x^2 - 2{,}1x + 91$

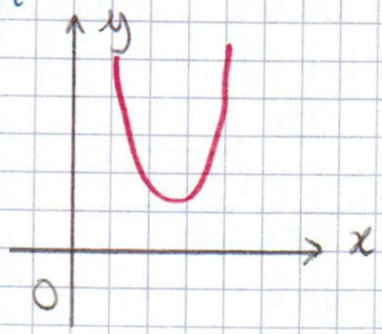
$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2{,}1)^2 - 4 \times 0{,}03 \times 91$

$\Delta < 0$

$a = 0{,}03 > 0$ donc, pour tout $x \in [0,70]$

$C'(x) > 0$



on en déduit que la fonction C est strictement croissante sur $[0,70]$

2. Soit $R(x)$, la recette réalisée par la vente de x objets :

$$R(x) = 80x$$

or, pour tout $x \in [0;70]$

$$B(x) = R(x) - C(x)$$
$$B(x) = 80x - (0{,}01x^3 - 1{,}05x^2 + 91x + 225)$$
$$B(x) = 80x - 0{,}01x^3 + 1{,}05x^2 - 91x - 225$$
$$B(x) = -0{,}01x^3 + 1{,}05x^2 - 11x - 225$$

$$B(25) = -0{,}01 \times 25^3 + 1{,}05 \times 25 - 11 \times 25 - 225$$
$$B(25) = 0$$

3. B est dérivable sur $[0;70]$ comme fonction polynôme

Pour tout $x \in [0;70]$

$$B'(x) = -0{,}01 \times 3x^2 + 1{,}05 \times 2x - 11$$
$$B'(x) = -0{,}03x^2 + 2{,}1x - 11$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 2{,}1^2 - 4 \times (-0{,}03) \times (-11)$$
$$\Delta = 3{,}09$$

$\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines.

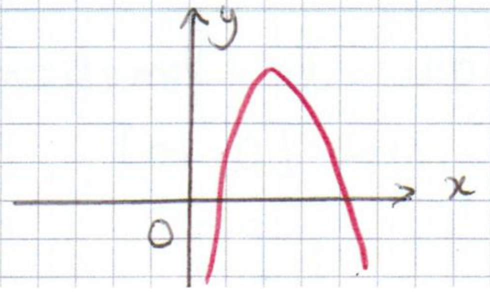
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-2{,}1-\sqrt{3{,}09}}{2 \times (-0{,}03)}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-2{,}1+\sqrt{3{,}09}}{2 \times (-0{,}03)}$

$x_1 \approx 64{,}297$ $\qquad$ $x_2 \approx 5{,}703$.

$a = -0{,}03 < 0$

$\Delta > 0$



x	0		x_2		25		x_1		70
signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
variations de B	-225	$\searrow$	$B(x_2)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$B(x_1)$	$\searrow$	720

$B(0) = -0{,}01 \times 0^3 + 1{,}05 \times 0^2 - 11 \times 0 - 225$

$B(0) = -225$

$B(70) = -0{,}01 \times 70^3 + 1{,}05 \times 70^2 - 11 \times 70 - 225$

$B(70) = 720$

a) sachant que $B(25) = 0$ et selon le tableau de variations de B, l'artisan doit vendre entre 25 et 70 objets pour gagner de l'argent (c'est-à-dire avoir un bénéfice positif : $B(x) \geq 0$)

b) $64 < x_1 < 65$

$B(64) = -0{,}01 \times 64^3 + 1{,}05 \times 64^2 - 11 \times 64 - 225$

$B(64) = 750{,}36$

$B(65) = -0{,}01 \times 65^3 + 1{,}05 \times 65^2 - 11 \times 65 - 225$

$B(65) = 750$

on en déduit que l'artisan réalise un bénéfice maximal égal à 750,36 € lorsqu'il produit et vend 64 objets.