Table des matières

Activité : Simulation de lancé de pièce

1 Position du problème

Cela fait 25 fois que je joue à Pile ou Face avec ma sœur. Je constate qu'elle gagne plus souvent que moi. Est-ce que je peux **rejeter l'hypothèse** "La pièce est bien équilibrée" ?

J'ai décidé d'y voir plus clair en faisant des simulations à la calculatrice.

2 Simulations à la calculatrice

On choisit de lancer $n = 100$ fois la pièce. On a donc 100 résultats qui seront "0" lorsque la pièce donne "Face" et "**1**" lorsque la pièce donne "**Pile**".

On appelle M_{100} la moyenne des 100 résultats 0 ou 1.

Par exemple, si on a 47 "Pile" on a un nombre moyen de "Pile" à chaque lancé égal à

$$M_{100} = 47/100$$

$$M_{100} = 0{,}47.$$

Il est équivalent de dire que $M_{100} = 0,47$ représente :

- **le "<u>nombre moyen</u> de Pile par lancé".**
- **la "<u>fréquence observée</u> de Pile dans l'échantillon de 100 lancés".**
- **la "<u>proportion de Pile</u> parmi les 100 lancés".**

Dans tous les cas la valeur de M est comprise entre 0 (le cas où sur tous les lancés on n'a que des Face) et 1 (le cas où on n'a que des Pile).

Si la pièce est bien équilibrée, on s'attend à ce que la valeur de M_{100} soit proche de $0{,}5$.

Mais on peut calculer M sur beaucoup moins que 100 lancés.

Exemple 1

$n = nombre\ de\ lancés$	Résultat ? 1 si "Pile" 0 si "Face"	M_n Nombre moyen de "Pile" par lancé
1	1	1

- Ce tableau indique qu'on a effectué $n = 1$ lancé.
- Sur ces n lancés on a obtenu 1 "Pile" (et 0 "Face")
- Donc le nombre moyen de "Pile" par lancé a été $M_1 = \frac{1}{1}$

Exemple 2

$n = nombre\ de\ lancés$	Résultat ? 1 si "Pile" 0 si "Face"	M_n Nombre moyen de "Pile" par lancé
1	1	1
2	1	1

- Ce tableau indique qu'on a effectué $n = 2$ lancés.
- Sur ces n lancés on a obtenu 2 "Pile" (et 0 "Face")
- Donc le nombre moyen de "Pile" par lancé a été $M_2 = \frac{2}{2}$

Exemple 3

$n = nombre\ de\ lancés$	Résultat ? 1 si "Pile" 0 si "Face"	M_n Nombre moyen de "Pile" par lancé
1	1	1
2	1	1
3	0	0,67

- Ce tableau indique qu'on a effectué $n = 3$ lancés.
- Sur ces n lancés on a obtenu 2 "Pile" (et 1 "Face")
- Donc le nombre moyen de "Pile" par lancé a été $M_3 = \frac{2}{3} = 0{,}67$

Exemple 4

$n = nombre\ de\ lancés$	Résultat ? 1 si "Pile" 0 si "Face"	M_n Nombre moyen de "Pile" par lancé
1	1	1
2	1	1
3	0	0,67
4	1	0,75

- Ce tableau indique qu'on a effectué $n = 4$ lancés.
- Sur ces n lancés on a obtenu 3 "Pile" (et 1 "Face")
- Donc le nombre moyen de "Pile" par lancé a été $M_4 = \frac{3}{4} = 0{,}75$

3 Travail à faire : vous réalisez en même temps que vous lisez ce paragraphe toutes les listes et graphiques qui sont décrits

Vous n'aurez pas exactement les mêmes valeurs puisque c'est aléatoire, mais l'idée reste la même.

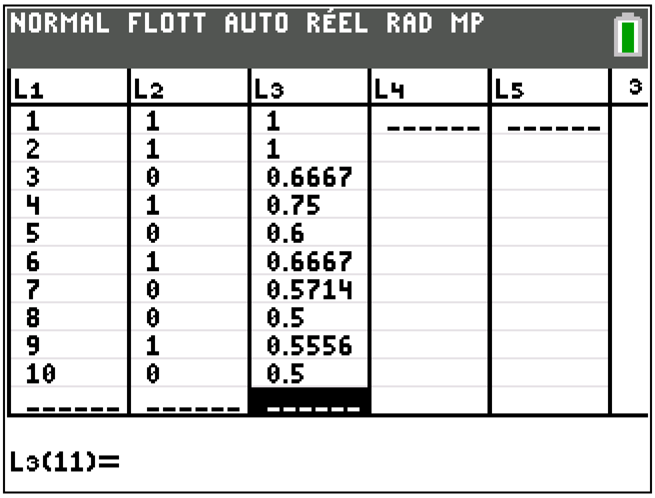
On utilise les listes L_1 L_2 et L_3 de la calculatrice :

Dans la liste L_1 on met les valeurs de n.

Dans la liste L_2 on met math PROB nbrAléatEnt(0,1,10) c'est-à-dire qu'on tire aléatoirement 0 ou 1 10 fois.

Dans la liste L_3 on met la somme cumulée des valeurs qui sont dans L_2 divisée par le nombre n présent dans la liste L_1 autrement dit ce sont les moyennes M_n.

Exemple pour les valeurs de n allant de 1 juqu'à 10 lancés :

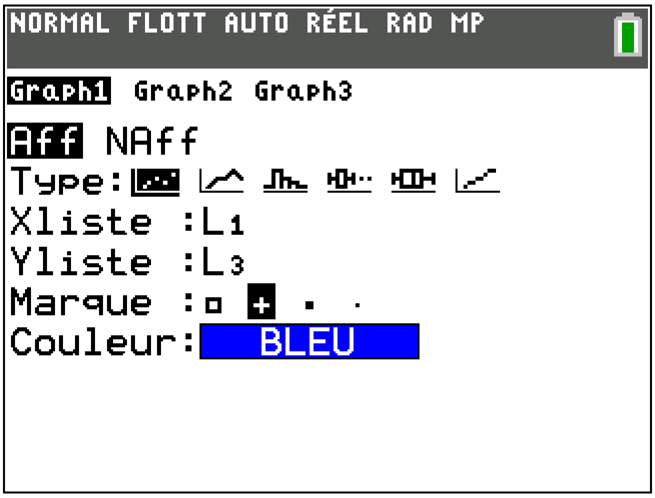

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP

L1	L2	L3	L4	L5
1	1	1	------	------
2	1	1		
3	0	0.6667		
4	1	0.75		
5	0	0.6		
6	1	0.6667		
7	0	0.5714		
8	0	0.5		
9	1	0.5556		
10	0	0.5		
------	------	------		

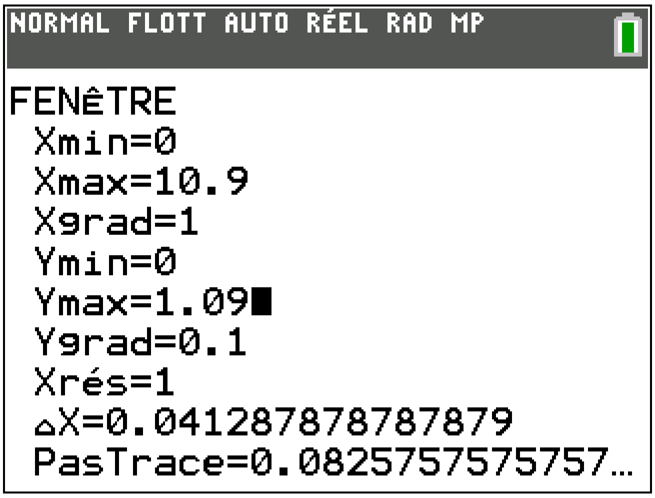
L3(11)=

- Ce tableau indique qu'on a effectué $n = 10$ lancés.
- Sur ces n lancés on a obtenu 5 "Pile" (et 5 "Face")
- Donc le nombre moyen de "Pile" par lancé a été $M_{10} = \frac{5}{10} = 0{,}50$

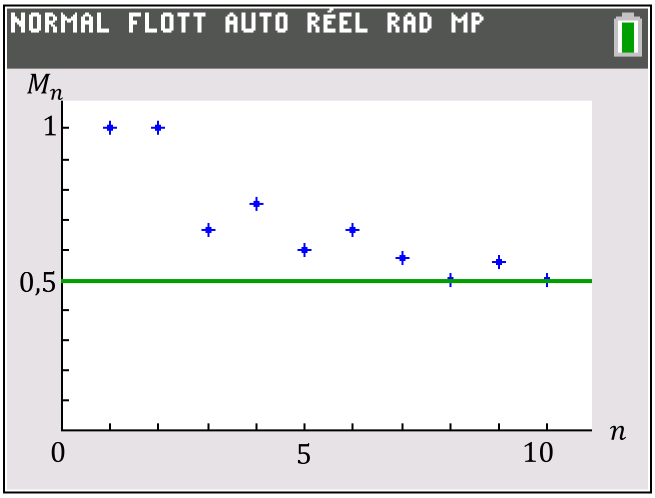
On peut faire un graphique $\boxed{2^{nd}}$ graph stats pour visualiser l'évolution du nombre moyen de "Pile" par lancé.



Avec le réglage de fenêtre :



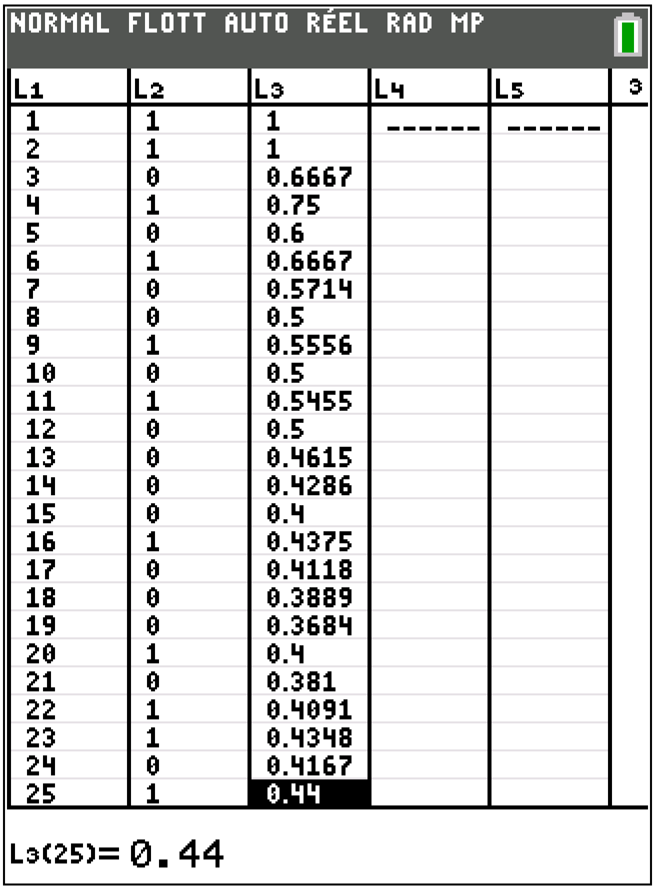
On obtient (la ligne verte correspond à la courbe d'équation Y1 = 0.5 qu'on a mise dans les f(x) de la calculatrice et qui correspond à la probabilité d'avoir Pile si la pièce est bien équilibrée). :



On voit que plus le nombre de lancés est grand, plus le nombre de moyen de "Pile" se rapproche de la probabilité $p = 0{,}5$

Mais que se passe-t-il si on simule 15 lancés supplémentaires ?

On obtient l'évolution suivante de M_n le nombre moyen de "Pile" sur n lancés (liste L_3)

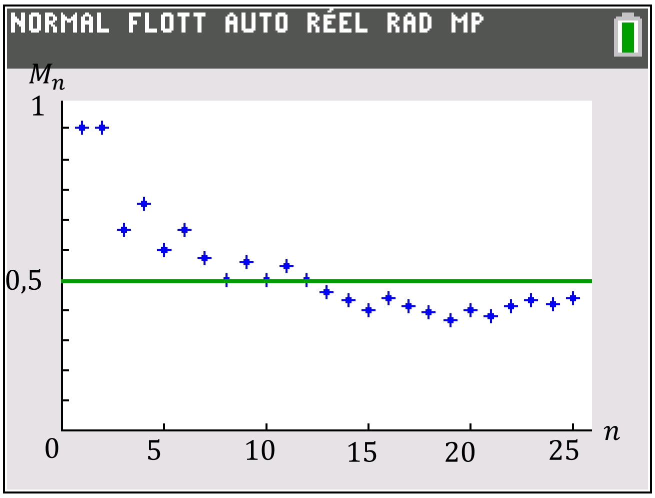


NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP

L1	L2	L3	L4	L5
1	1	1	------	------
2	1	1		
3	0	0.6667		
4	1	0.75		
5	0	0.6		
6	1	0.6667		
7	0	0.5714		
8	0	0.5		
9	1	0.5556		
10	0	0.5		
11	1	0.5455		
12	0	0.5		
13	0	0.4615		
14	0	0.4286		
15	0	0.4		
16	1	0.4375		
17	0	0.4118		
18	0	0.3889		
19	0	0.3684		
20	1	0.4		
21	0	0.381		
22	1	0.4091		
23	1	0.4348		
24	0	0.4167		
25	1	0.44		

L3(25)=0.44

Ce qui donne le graphique :



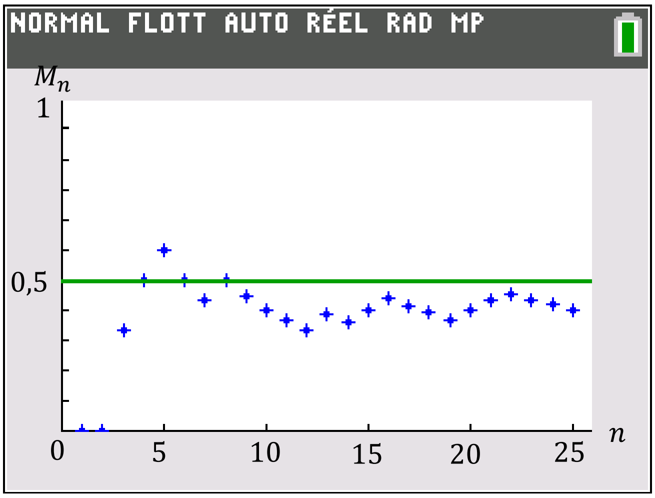
Cette fois, on voit qu'après le 10 premiers lancés l'apparition de "Pile" se fait plus rare et le nombre moyen tend à descendre. Il est même en dessous de 0,37 si on considère les 19 premiers lancés ($M_{19} = \frac{7}{19} = 0{,}3684$)

Ou bien, si on décompose :

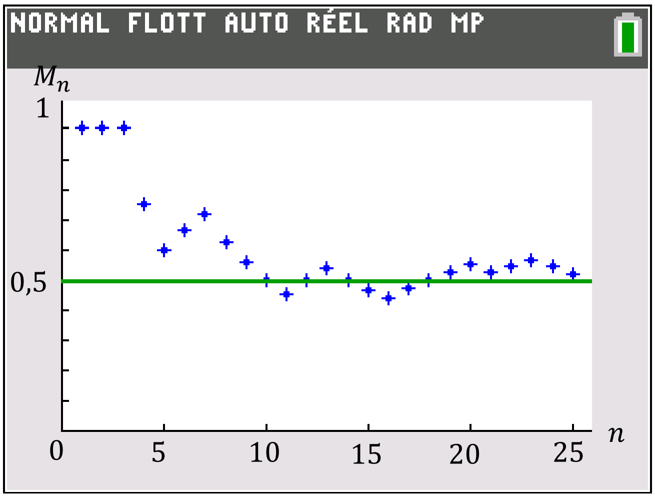
- sur les 10 lancés de 1 à 10 on a eu 5 "Pile"
- sur les 10 lancés de 11 à 20, on a eu 3 "Pile" soit un nombre moyen de "Pile" de seulement $\frac{3}{10} = 0{,}30$ dans la deuxième dizaine !!!

Et pourtant **le tirage n'est pas truqué** car on n'a pas modifié la fonction de tirage au sort $\boxed{\text{math}}$ PROB nbrAléatEnt(0,1,10) de la calculatrice.

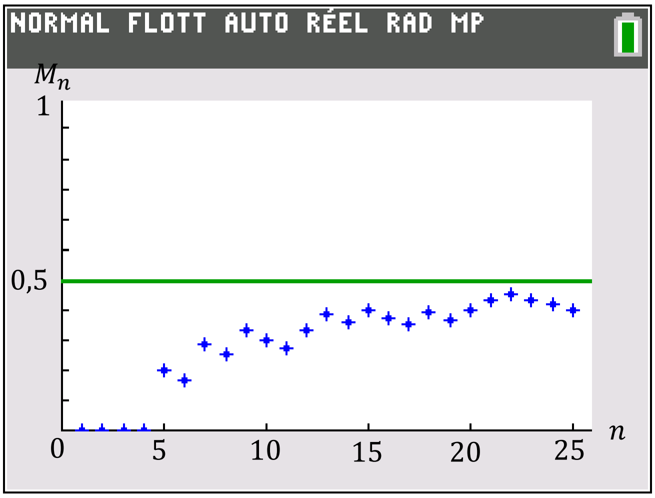
Recommençons plusieurs fois des simulations de 25 lancés de pièces. A chaque fois, il faut recalculer L_2 et L_3.



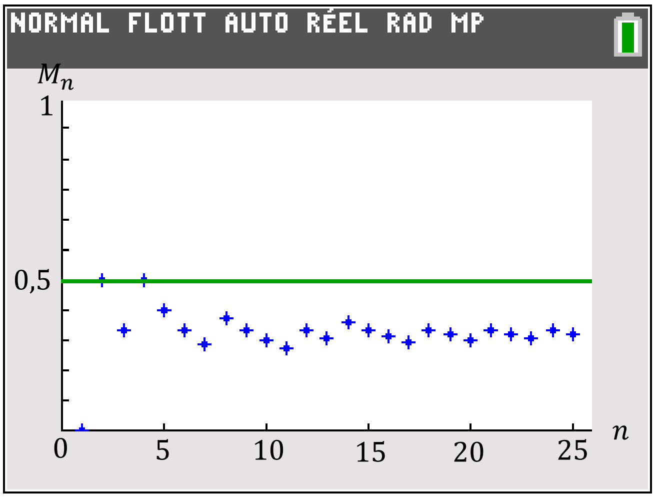
Simulation n°2



Simulation n°3



Simulation n°4

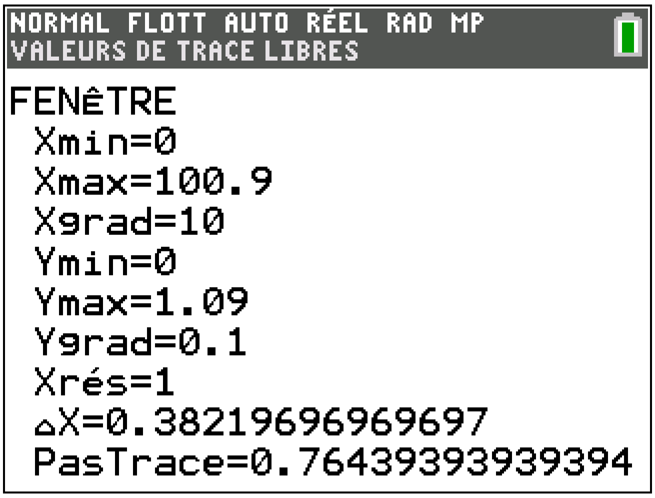


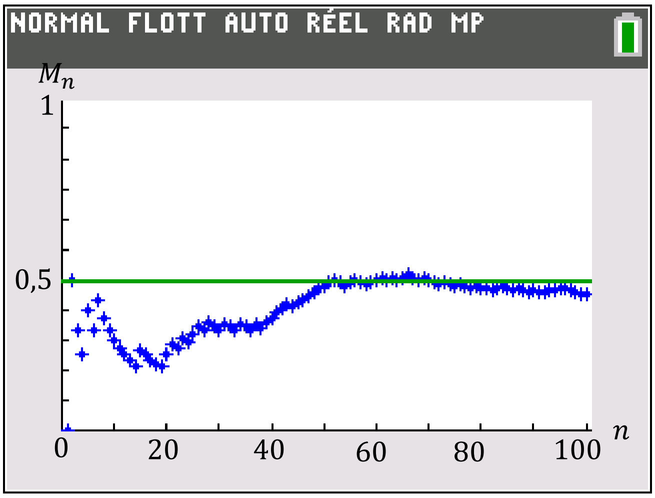
Simulation n°5

On observe que sur 4 simulations de 25 lancés, le nombre moyen M_{25} termine **parfois près ou parfois loin de la probabilité $p = 0,5$.**

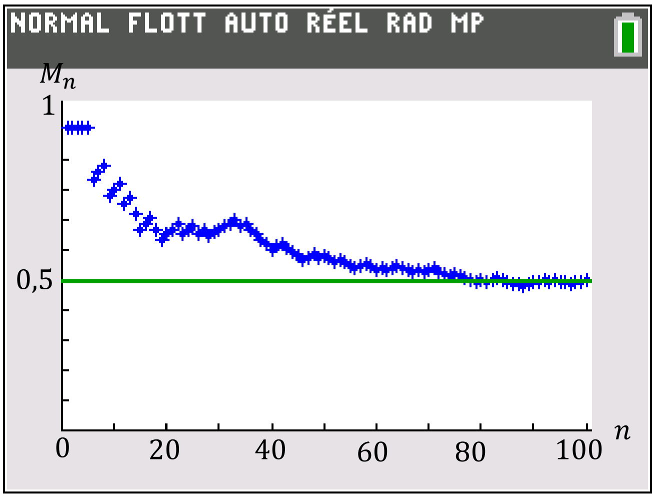
Et si on faisait des "échantillons" de tailles plus grandes, par exemple de taille $n = 100$ lancés ? La méthode est décrite dans cette vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=y-JYpcXFabw

Voici 4 échantillons de taille $n = 100$

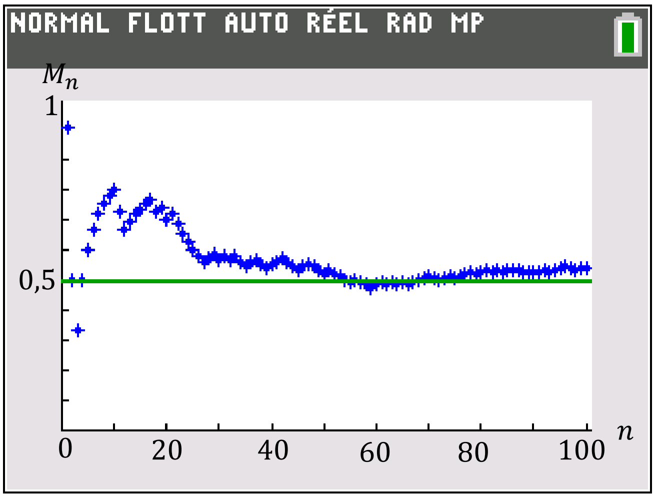




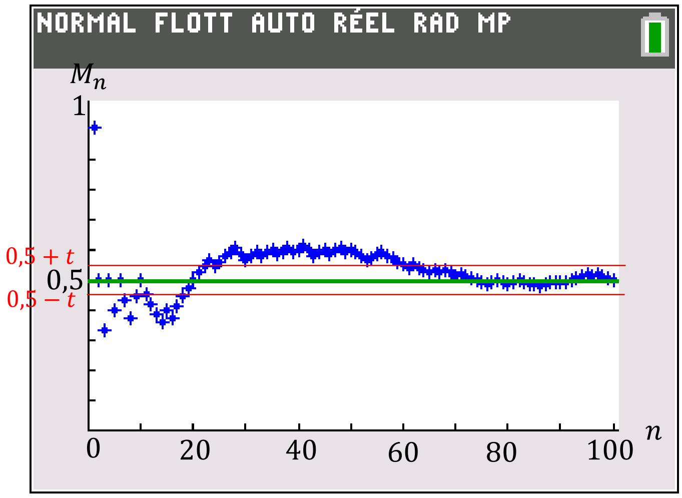
Simulation n°6



Simulation n°7



Simulation n°8



Simulation n°9

On observe que sur 100 lancés, le nombre moyen M_{100} ne termine **jamais loin de la probabilité $p = 0,5$.**

On observe également que pour un nombre faible de lancés (typiquement moins de 25) la **fluctuation**[1] de la moyenne empirique[2] M_n est importante. On peut la qualifier d'importante quand sa distance par rapport à $E(X) = p = 0,5$ dépasse $t = 0,05$ par exemple, ce qui correspond aux traits rouges sur la simulation n°9

Cela correspondrait à la marge $[0,45\ ;\ 0,55]$ "acceptable" entre les nombres de "Pile" et de "Face".

Conclusion :

Je me fixe cette règle :

Si j'observe que $M_n \notin]0,45\ ;\ 0,55[$ alors je rejette l'hypothèse "La pièce est bien équilibrée".

Mais il est peut arriver que je rejette à tort l'hypothèse "La pièce est bien équilibrée".

En effet, il y a parfois de fortes fluctuations dans la valeur de la fréquence observée M qui peuvent entrainer la valeur de M en dehors de l'intervalle $]0,45\ ;\ 0,55[$, même pour une pièce parfaitement équilibrée.

Remarque : On peut très bien se fixer une autre règle si on préfère.

[1] **Fluctuation** : variation.
[2] **Empirique** : qui provient de l'expérience.