n°82 p40

La suite (u_n) est défini par $\begin{cases} u_0 = 65 \\ u_{n+1} = 0{,}8u_n + 18 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) $u_1 = 0{,}8(u_0) + 18 \qquad u_1 = 0{,}8(65) + 18 \qquad \underline{u_1 = 70}$

$u_2 = 0{,}8(u_1) + 18 \qquad u_2 = 0{,}8(70) + 18 \qquad \underline{u_2 = 74}$

2) $v_n = u_n - 90$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Pour montrer qu'une suite est géométrique, on peut montrer que $v_{n+1} = q\, v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Puisque $v_n = u_n - 90$ est vrai pour tout entier n alors c'est vrai aussi si on remplace l'entier n par l'entier suivant $n+1$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 90$$

Dans cette formule on remplace u_{n+1} par $0{,}8u_n + 18$ (puisque d'après la définition de la suite (u_n) on a égalité des deux valeurs.

$$v_{n+1} = (0{,}8u_n + 18) - 90$$
$$v_{n+1} = 0{,}8u_n - 72$$

Dans cette formule on remplace u_n par son expression en fonction de v_n. Cette expression est déduite de $v_n = u_n - 90$
$v_n + 90 = u_n$

D'où
$$v_{n+1} = 0{,}8(v_n + 90) - 72$$
$$v_{n+1} = 0{,}8v_n + 72 - 72$$
$$\underline{v_{n+1} = 0{,}8\, v_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Ainsi la suite (v_n) est <u>géométrique</u> de 1er terme v_0, de raison $\underline{q = 0{,}8}$
Pour calculer v_0 on utilise la formule

$$v_n = u_n - 90$$
$$v_0 = u_0 - 90$$
$$v_0 = 65 - 90$$
$$\underline{v_0 = -25}$$

b) Puisque la suite (v_n) est géométrique alors $v_n = v_0 \times q^n$
$\underline{v_n = -25 \times 0{,}8^n}$

On en déduit d'après $u_n = v_n + 90$ que $\underline{u_n = -25 \times 0{,}8^n + 90}$

3) a)
```
1  u ← 65
2  n ← 0
3  Tant que u < 85
4      n ← n+1
5      u ← 0,8 u + 18
```

b) A la fin de l'exécution de l'algorithme, la boucle tant que s'est terminée avec la valeur de n quand $u > 85$ la première fois. On peut • soit faire la table des u_n • soit programmer l'algorithme de Python. Dans les deux cas $\underline{\text{on trouve } n = 8}$

4) a) • Baisser une quantité u_n de 20%, c'est faire l'opération $u_n - \frac{20}{100} \times u_n$

ou, en factorisant u_n ; c'est faire l'opération $u_n\left(1 - \frac{20}{100}\right)$

ou, en simplifiant, c'est faire l'opération $u_n \times 0{,}8$

Cela correspond à perdre 20% des abonnements du fait des résiliations, par rapport au nombre d'abonnement u_n au mois n.

• Cependant, chaque mois, il y a 18 abonnés en plus. c'est faire l'opération $0{,}8\, u_n + 18$

• Ainsi le mois $n+1$ il y a $\underline{u_{n+1} = 0{,}8\, u_n + 18}$ abonnés.

b)

	mois	n	Nombre d'abonnés	Recette mensuelle
	Juillet 2017	0	$u_0 = 65$	$65 \times 52€ = 3380$
	Août 2017	1	$u_1 = 0{,}8(65) + 18 = 70$	$70 \times 52€ = 3640$
	Septembre 2017	2	$u_2 = 74$	$74 \times 52€ = 3848$
	⋮			
	Décembre 2017	5	u_5	$u_5 \times 52 =$
Année 2018	Janvier 2018	6	$u_6 = -25 \times 0{,}8^6 + 90$	$u_6 \times 52 =$
	⋮	⋮	⋮	⋮
	Décembre 2018	17	$u_{17} = -25 \times 0{,}8^{17} + 90$	$u_{17} \times 52 =$

La recette mensuelle dépasse 4420 € lorsque le nombre d'abonnés dépasse $\frac{4420}{52} = 85$

Il suffit de programmer la suite (u_n) définie par $u_n = -25 \times 0{,}8^n + 90$ sur la calculatrice entre $n = 6$ et $n = 17$

NORMAL FLOTT DÉC RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

n	$u(n)$
0	65
1	70
2	74
3	77.2
4	79.76
5	81.808
6	83.446
7	84.757
8	$\boxed{85.806}$
9	86.645
10	87.316

Selon ce modèle, la première fois que le nombre d'abonnés dépasse 85 est quand $n = 8$, c'est à dire en <u>Mars 2018</u>.

c) Pour savoir vers quelle valeur semble tendre la recette mensuelle, il suffit de savoir vers quelle valeur tend le nombre d'abonnés.

Pour cela, on continue à descendre dans la table de la calculatrice.

Par exemple, après $n = 30$ on obtient des valeurs de u_n qui semblent être aussi proche que l'on veut de 90.

NORMAL FLOTT DÉC RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

n	$u(n)$
30	89.969
31	89.975
32	89.98
33	89.984
34	89.987
35	89.99
36	89.992
37	89.994
38	89.995
39	89.996
40	89.997

$n=40$

Donc, selon ce modèle, la recette mensuelle semble avoir pour limite $90 \times 52 =$ 4680 €