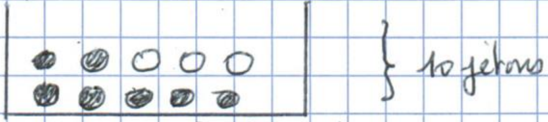
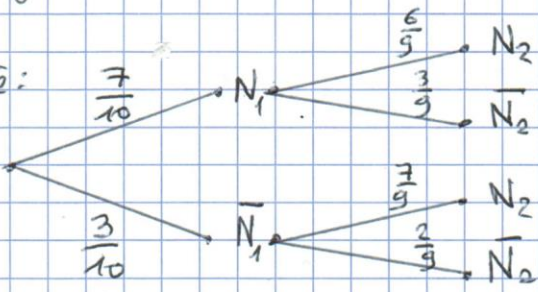
n° 68 p 332

1) L'urne contient 10 jetons : { 7 noirs, 3 blancs



Soit N_1 l'évènement : "obtenir un jeton noir au 1er tirage"
et $\overline{N_1}$ l'évènement : "obtenir un jeton blanc au 1er tirage"
Soit N_2 l'évènement : "obtenir un jeton noir au 2e tirage"
et $\overline{N_2}$ l'évènement : "obtenir un jeton blanc au 2e tirage"

On a l'arbre de probabilités pour deux tirages successifs sans remise :



- A est l'évènement "deux jetons blancs"

$P(A) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9}$ $\qquad P(A) = \frac{1}{15}$

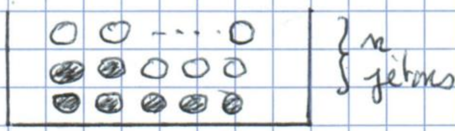
- B est l'évènement "deux jetons de même couleur" = "1 seule couleur"

$P(B) = \frac{1}{15} + \frac{7}{10} \times \frac{6}{9}$ $\qquad P(B) = \frac{8}{15}$

- C est l'évènement "deux couleurs différentes".
C'est l'évènement contraire de B

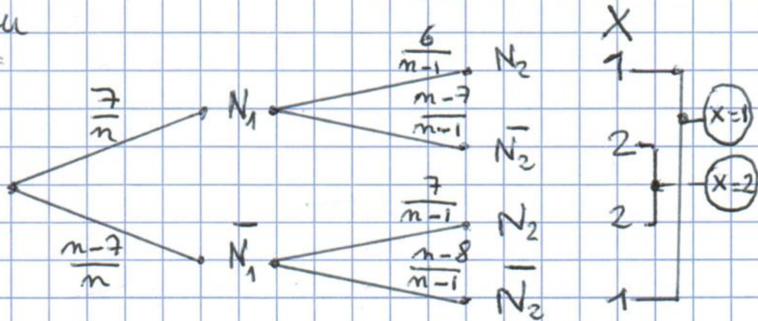
$P(C) = 1 - p(B)$ $\qquad p(C) = 1 - \frac{8}{15}$ $\qquad P(C) = \frac{7}{15}$

2) L'urne contient n jetons ($n \geqslant 9$) : { 7 noirs, $n-7$ blancs



a) X donne le nombre de couleurs différentes.
Donc X ne peut prendre que les valeurs "1 seule couleur" ou "2 couleurs".

On a l'arbre de probabilités pour deux tirages successifs sans remise :



- $P(X=1) = \frac{7}{n} \times \frac{6}{n-1} + \frac{n-7}{n} \times \frac{n-8}{n-1}$

$P(X=1) = \frac{n^2 - 15n + 98}{n(n-1)}$

- $P(X=2) = \frac{7}{n} \times \frac{n-7}{n-1} + \frac{n-7}{n} \times \frac{7}{n-1}$

$P(X=2) = \frac{14n - 98}{n(n-1)}$ D'où la loi de probabilité :

x_i	1	2	TOTAL
$P(X = x_i)$	$\frac{n^2 - 15n + 98}{n(n-1)}$	$\frac{14n - 98}{n(n-1}$	1

b) L'espérance $E(X) = \sum_{i=1}^{2} p_i x_i$

$E(X) = \frac{n^2 - 15n + 98}{n(n-1)} \times 1 + \frac{14n - 98}{n(n-1)} \times 2$ $\qquad E(X) = \frac{n^2 + 13n - 98}{n(n-1)}$.

c) Il faut étudier les variations de la fonction f définie sur $[9 ; +\infty[$ par :
$f(x) = \frac{x^2 + 13x - 98}{x(x-1)}$

On trouve $f'(x) = \frac{-14x^2 + 196x - 98}{(x(x-1))^2}$

• Etude du signe de $-14x^2+196x-98$

On cherche Δ

$\Delta = 196^2 - 4(-14)(-98)$

$\Delta = 32928$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-196-\sqrt{32928}}{-28} \approx 13{,}48$$

et $$x_2 = \frac{-196+\sqrt{32928}}{-28} \approx 0{,}52$$

D'où le tableau de variations :

x	9		x_1		$+\infty$
signe de $-14x^2+196x-98$		$+$	0	$-$	
signe de $(x(x-1))^2$		$+$		$+$	
signe de f'		$+$	0	$-$	
variations de f		↗		↘	

n est un entier, donc l'espérance atteint son maximum soit pour $n = 13$, soit pour $n = 14$.

A la calculatrice on trouve pour $n = 13$ $E(X) = \frac{20}{13} \approx 1{,}54$

et pour $n = 14$ $E(X) = \frac{20}{13}$

C'est la même valeur.

<u>Conclusion</u> : On obtient l'espérance maximale pour X lorsque l'urne contient soit 13 soit 14 jetons.