

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ avec } f(x) = \frac{1}{4}x + 12 \text{ polynôme sur } \mathbb{R}.$$

1) a) Soit $P(n)$ la propriété $u_n \leq 16$

• Initialisation

$$1 \leq 16 \text{ et } u_0 = 1 \text{ donc } u_0 \leq 16 \quad P(0) \text{ est vraie}$$

• Hérité

Supposons que pour un certain entier naturel k

$$u_k \leq 16$$

$$\text{Montrons qu'alors } u_{k+1} \leq 16$$

On part de l'hypothèse de récurrence:

$$u_k \leq 16$$

$$f(u_k) \leq f(16) \text{ car } f \text{ est croissante sur } [0; +\infty[\mathbb{R}$$

$$u_{k+1} \leq 16$$

$P(n)$ est héréditaire

• Conclusion: $u_n \leq 16 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

la suite (u_n) est majorée par 16

b) Soit $Q(n)$ la propriété $u_n \leq u_{n+1}$

• Initialisation

$$u_0 = 1 \quad u_1 = \frac{1}{4} + 12 = \frac{49}{4} = 12,25 \text{ donc } u_0 \leq u_1$$

• Hérité

Supposons que pour un certain entier naturel k

$$u_k \leq u_{k+1}$$

$$\text{Montrons qu'alors } u_{k+1} \leq u_{k+2}$$

On part de l'hypothèse de récurrence:

$$u_k \leq u_{k+1}$$

$$f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \text{ car } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}$$

$$u_{k+1} \leq u_{k+2}$$

• Conclusion: $u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

la suite (u_n) est croissante.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge.

2) a) f est une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

b) (u_n) converge vers le réel l donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l \quad (1)$$

$$\text{Mais aussi } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = f(l) \quad (2)$$

Des relations (1) et (2) on déduit que $f(l) = l$

c) l est une solution de l'équation $x = f(x)$

Réolvons cette équation: $x = \frac{1}{4}x + 12$

$$\frac{3}{4}x = 12 \quad x = \frac{4}{3} \times 12 \quad x = 16$$

Donc $l = 16$. Ainsi la suite (u_n) a pour limite 16.