

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{e^n}{n^n}$

1) Conjectures à la calculatrice

$$u_n = \left(\frac{e}{n}\right)^n$$

n	u_n
1	2,71
2	1,84
3	0,74
...	...
9	$2,1 \cdot 10^{-5}$
10	$2,2 \cdot 10^{-6}$

Il semble que : (u_n) est décroissante $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

2) la suite auxiliaire (v_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln(u_n)$
(On a donc $u_n = e^{v_n}$)

a) On pose $v_n = \ln\left(\frac{e^n}{n^n}\right)$

$$v_n = n \ln\left(\frac{e}{n}\right)$$

$$v_n = n (\ln(e) - \ln(n))$$

$$v_n = n (1 - \ln(n))$$

$$f(x) = x(1 - \ln(x)) \quad \forall x \in]0; +\infty[\quad v_n = f(n).$$

• Sens de variation de f

$$f'(x) = (1)(1 - \ln(x)) + (x) \left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 1 - \ln(x) - 1$$

$$f'(x) = -\ln(x)$$

Donc si $x \in]0; 1[$ alors $f'(x) > 0$ donc f est croissante

si $x \in [1; +\infty[$ alors $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante.

Comme (v_n) est définie pour $n \geq 1$ alors (v_n) est décroissante.

b) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln(x)) = -\infty \end{array} \right\}$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

3) On a $u_n = e^{v_n}$
donc $u_{n+1} = e^{v_{n+1}}$ et comme (v_n) est décroissante,

$$\forall n \geq 1, \quad v_n > v_{n+1} \\ e^{v_n} > e^{v_{n+1}}$$

car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$
 $u_n > u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est décroissante.

n°62 p138

On a montré à la question 2) b) que

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \text{ donc, par composition, } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{V_n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$