

La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$

1) a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln(x)) = -\infty$

} donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(x)}{x^2} = -\infty$
 Donc la droite d'équation $x=0$ est une asymptote

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln(x)) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

} donc forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$

On transforme donc $f(x)$ pour pouvoir utiliser une limite vue dans le cours.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ d'après le cours

donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}$

2) a) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 1 + \ln(x)$ $u'(x) = \frac{1}{x}$
 $v(x) = x^2$ $v'(x) = 2x$

Donc $f'(x) = \frac{(\frac{1}{x})(x^2) - (1 + \ln(x))(2x)}{(x^2)^2}$

$$f'(x) = \frac{x - (2x + 2x \ln(x))}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x - 2x - 2x \ln(x)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-x - 2x \ln(x)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x(-1 - 2 \ln(x))}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

b) Le sens de variation de f est donné par le signe de la dérivée f' .
 Pour connaître le signe de $-1 - 2 \ln(x)$ on résout par exemple

$$-1 - 2 \ln(x) > 0$$

$$-1 > 2 \ln(x)$$

$$-\frac{1}{2} > \ln(x)$$

$$e^{-\frac{1}{2}} > x$$

Donc si $x \in]0; e^{-\frac{1}{2}}[$ alors $-1 - 2 \ln(x) > 0$

x	0	$e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,607$	$+\infty$
signe de $-1-2\ln(x)$		+	-
signe de x^3		+	+
signe de $f'(x)$		+	-
variations de f			

Le maximum atteint et $f(e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1 + \ln(e^{-\frac{1}{2}})}{(e^{-\frac{1}{2}})^2}$

$$f(e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{e^{-1}}$$

$$f(e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{2} \times \frac{e}{1} = \boxed{\frac{e}{2}} \approx 1,359$$

3) a) Cette question revient à prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x qui est l'abscisse du point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

- Si $x \in]0; e^{-\frac{1}{2}}]$:
 - * f est continue
 - * f est strictement croissante
 - * $0 \in]\lim_{x \rightarrow 0} f(x); f(e^{-\frac{1}{2}})]$

donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x \in]0; e^{-\frac{1}{2}}]$

- Si $x \in]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$ alors f est strictement décroissante, et donc on a :

$$e^{-\frac{1}{2}} < x$$

$$f(e^{-\frac{1}{2}}) > f(x) > \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\frac{e}{2} > f(x) > 0$$

$$\frac{e}{2} < f(x) < 0$$

Sur cet intervalle $f(x) = 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

Conclusion: l'équation $f(x) = 0$ a bien une unique solution x sur $]0; +\infty[$, ce qui signifie que la courbe C_f coupe une et une seule fois l'axe (Ox) au point $A(x; 0)$.

$$x \text{ est la solution de } f(x) = 0$$

$$1 + \ln(x) = 0$$

$$\ln(x) = -1$$

$$x = e^{-1} \approx 0,368$$

b) Le signe de f :

x	0	x	$+\infty$
signe de f		-	+