3.2 Linéarité de l'intégrale

On considère deux fonctions f et g continues sur un intervalle$[a; b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b (\lambda f(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$$

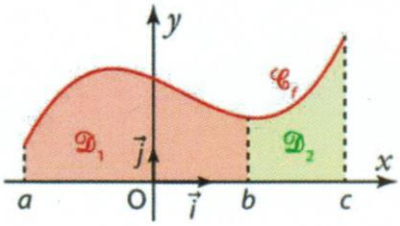
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

Exemple : Calculer en utilisant la linéarité de l'intégrale $A = \int_1^2 \ln(x)\, dx + \int_1^2 \left(1 + \ln \frac{1}{x}\right) dx$.

3.3 Relation de Chasles

f est une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c sont 3 réels de l'intervalle I.

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$



Remarque : Si f est continue et positive et $a \leq b \leq c$, la relation de Chasles est la simple traduction de l'addition des aires de deux domaines adjacents.

Aire totale = Aire du domaine $\mathcal{D}_1$ + Aire du domaine $\mathcal{D}_2$ se traduit par :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

3.4 Intégrales et inégalités

Soit a et b deux réels. Les fonctions f et g sont continues sur l'intervalle $[a; b]$.

Si pour tout $x \in [a\,; b], f(x) \geq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$.

En particulier : Si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.

Si $f \leq 0$ alors $\int_a^b f(x)\, dx \leq 0$.

Remarque : Les réciproques de ces trois propriétés sont fausses.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$, on a $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$.

On sait que si $x \geqslant 1$ alors $x^2 \geqslant x$ donc $-x^2 \leq -x$.
d'où $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.
donc $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ car une exponentielle est toujours positive.

2. En déduire un encadrement de $\int_1^2 f(x)dx$.

Si $x \in [1; 2]$ alors $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$

donc $\int_1^2 0\, dx \leq \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq \int_1^2 e^{-x} dx$

Calcul de $\int_1^2 e^{-x} dx$

- Si $F(x) = -e^{-x}$ alors $F'(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$. Donc
Donc $\int_1^2 e^{-x}\, dx = F(2) - F(1) = -e^{-2} - (-e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2}$ d'où $0 \leq \int_1^2 f(x)dx \leq e^{-1} - e^{-2}$