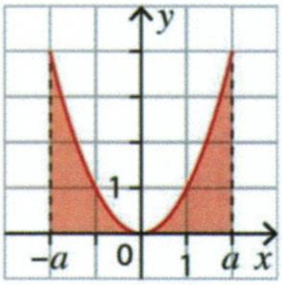
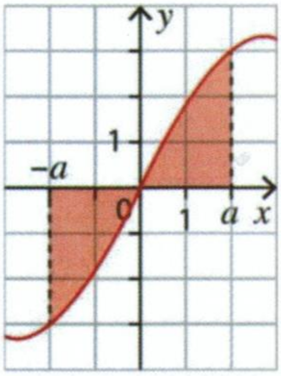
3.5 Cas des fonctions paires et des fonctions impaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[-a; a]$.

- Si f est paire alors $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$.
- Si f est impaire alors $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$





4 Intégration par parties

4.1 Activité

On considère la fonction $f : x \longmapsto xe^{-x}$ et on souhaite calculer $I = \int_0^1 f(x)dx$.

1. Peut-on donner directement une primitive de f ? xe^{-x} n'est pas une forme de dérivée parmi les formes connues ($\frac{u'}{u}$, $u'e^{u}$ etc...) . De plus c'est un produit uv mais la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées - Donc NON.

2. Calculer sa dérivée et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} - f'(x)$.

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = e^{-x} \end{cases}$ On a donc $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$ donc $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$

et comme $f(x) = xe^{-x}$ alors $f'(x) = e^{-x} - f(x)$

donc $f(x) = e^{-x} - f'(x)$

3. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 f(x)dx$.

$I = \int_0^1 (e^{-x} - f'(x))\,dx$ donc $I = \int_0^1 e^{-x}dx - \int_0^1 f'(x)\,dx$

- Calcul de $\int_0^1 e^{-x}dx = F(1) - F(0)$ avec $F(x) = -e^{-x}$ donc $\int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} + e^{0} = 1 - e^{-1}$
- Calcul de $\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0)$ car f est une primitive de f' donc $\int_0^1 f'(x) = e^{-1}$ Donc $I = (1 - e^{-1}) - (e^{-1})$ $I = 1 - 2e^{-1}$

4. Soit u et v des fonctions dérivables sur $[a; b]$ et leurs dérivées u' et v' continues.
   a. Montrer que $u'v = (uv)' - uv'$.

   On a $(uv)' = u'v + uv'$ donc $u'v = (uv)' - uv'$

   b. En déduire que $\int_a^b (u'(x)\,v(x))\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b (u(x)\,v'(x))\,dx$.

   D'après l'égalité $u'v = (uv)' - uv'$

   on a $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \int_a^b (uv)'(x)\,dx - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$

   - Calcul de $\int_a^b (uv)'(x)\,dx = uv(b) - uv(a)$ car uv est une primitive de $(uv)'$ donc $\int_a^b (uv)'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b$

   Cette égalité est appelée « formule d'intégration par parties ».

   On retient la formule $\boxed{\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'}$

4.2 Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ qui admettent des dérivées u' et v' continues.

$$\boxed{\int_a^b (u'(x)\,v(x))\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b (u(x)\,v'(x))\,dx}$$

L'intérêt de l'intégration par partie est de se ramener à une intégrale $\int_a^b (u(x)\,v'(x))\,dx$ plus facilement calculable que l'intégrale de départ $\int_a^b (u'(x)\,v(x))\,dx$.