2.2 Théorème fondamental

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Soit F la fonction définie sur $[a;b]$ par

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. La fonction F est la primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

2.3 Condition suffisante d'existence d'une primitive d'une fonction

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Exemple :

La fonction ln est continue sur $[1;20]$ donc ln admet des primitives sur $[1;20]$.

D'après le théorème d'existence d'une primitive, la fonction F définie sur $[1;20]$ par $F(x) = \int_1^x \ln(t)\,dt$ est la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1. Remarque : $F(x) = x\ln(x) - x + k$ (trouvé sur Google)

$F(1) = 0 \Leftrightarrow 1\ln(1) - 1 + k = 0$

$\Leftrightarrow k = 1$ donc $F(x) = x\ln(x) - x + 1$

2.4 Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a;b]$.

On a $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Ce nombre peut aussi se noter $[F(x)]_a^b$.

La propriété permet de calculer l'aire sous la courbe d'une fonction f continue et positive grâce à une primitive de f.

Exemple : $F(6) - F(4) = \int_1^6 \ln(t)\,dt - \int_1^4 \ln(t)\,dt = \int_4^6 \ln(t)\,dt$

où F est la primitive de $\ln$ qui s'annule pour $x = 1$

Remarque :

Le réel $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie pour f.

Démonstration : Si G est une autre primitive de f alors montrer que $\int_a^b f(x)\,dx$ conserve la même valeur.

Soit $G(x) = F(x) + k'$ On a $G(b) - G(a) = F(b) + k' - (F(a) + k') = F(b) - F(a)$

2.5 Exemples

Déterminer chacune des intégrales suivantes et interpréter leurs valeurs :

a) $A = \int_{-1}^4 (-x^2 + 3x + 4)\,dx$ Si $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4x$ alors $F'(x) = -x^2 + 3x + 4$

donc $A = F(4) - F(-1)$

$A = \frac{125}{6} \approx 20,83$

b) $B = \int_0^1 \frac{t^2}{(t^3+1)^2}dt$ Si $F(t) = \frac{1}{t^3+1}$ alors $F'(t) = \frac{-3t^2}{(t^3+1)^2}$

Si $F(t) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{t^3+1}$ alors $F'(t) = \frac{t^2}{(t^3+1)^2}$

donc $B = F(1) - F(0)$

$B = -\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{3}\right)$ $B = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ $B = \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$ $B = \frac{1}{6}$

3 Généralisation de la définition de l'intégrale à des fonctions continues de signe quelconque

3.1 Définition

Soit une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive quelconque de f sur $[a;b]$.

L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel défini par $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.