n°24p259

1) On sait que $\ln(X)$ existe lorsque $0 < X$.
De plus on sait que :
- Si $0 < X < 1$ alors $\ln(X) < 0$
- Si $X = 1$ alors $\ln(X) = 0$
- Si $X > 1$ alors $\ln(X) > 0$

• Donc il s'agit de savoir si $(1+x^2)$ est plus petit ou plus grand que 1.
$\forall x \in [0;1]$ $x^2 \geq 0$ donc $1+x^2 \geq 1$
On en déduit que $\underline{\ln(1+x^2) \geq 0}$.

2) a) g est la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x) = \ln(1+x^2) - x^2$
g est dérivable sur $[0;1]$. $g'(x) = \dfrac{2x}{|1+x^2|} - 2x$
Mais, comme $1+x^2 \geq 0$ pour tout $x \in [0;1]$, $g'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} - 2x$

$g'(x) = \dfrac{2x - 2x(1+x^2)}{1+x^2}$ $g'(x) = \dfrac{-2x^3}{1+x^2}$

x	0		1
$-2x^3$	0	$-$	
$1+x^2$		$+$	
$g'(x)$	0	$-$	
g	0	$\searrow$	$\ln(2)-1$

b) Le maximum de g est atteint en $x=0$ et vaut 0
donc $g(x) \leq 0$ $\forall x \in [0;1]$

3) On cherche d'abord un encadrement de la fonction qui est dans l'intégrale.
Posons $f(x) = \ln(1+x^2)$

D'après la question 2) $g(x) \leq 0$ sur $[0;1]$
$\ln(1+x^2) - x^2 \leq 0$
$\ln(1+x^2) \leq x^2$

D'après la question 1) $\ln(1+x^2) \geq 0$

Donc $\forall x \in [0;1]$ on a : $\underline{0 \leq \ln(1+x^2) \leq x^2}$

On en déduit l'encadrement : $\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx \leq \int_0^1 x^2\,dx$

• Calcul de $\int_0^1 0\,dx$. Comme on intègre la fonction nulle donc on a une intégrale nulle. $\int_0^1 0\,dx = \underline{0}$

• Calcul de $\int_0^1 x^2\,dx$. On peut considérer $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$
En effet sa dérivée $F'(x) = x^2$
Donc $\int_0^1 x^2\,dx = F(1) - F(0) = \dfrac{1^3}{3} - \dfrac{0^3}{3} = \underline{\dfrac{1}{3}}$

D'où l'encadrement de $I = \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$: $\underline{0 \leq I \leq \frac{1}{3}}$