

n°59 p262

1) Posons $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$

On cherche a et b tels que $a + \frac{b}{x+1} = f(x)$

$$\frac{a(x+1)+b}{x+1} = f(x)$$

$$\frac{ax + (a+b)}{x+1} = \frac{3x+1}{x+1}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ a+b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1-3 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

Donc une autre forme de $f(x)$ est $f(x) = 3 - \frac{2}{x+1}$

On peut le vérifier en traçant les courbes d'équations

$$Y_1 = \frac{3x+1}{x+1}$$

$$\text{et } Y_2 = 3 - \frac{2}{x+1}$$

sur la calculatrice. Les deux courbes se superposent.

2) On ne peut pas directement trouver la primitive de $\frac{3x+1}{x+1}$, mais on peut trouver une primitive de $3 - \frac{2}{x+1}$

Si: $F(x) = 3x - 2 \ln|x+1|$ alors $F'(x) = 3 - 2 \times \frac{1}{x+1}$

$$F'(x) = 3 - \frac{2}{x+1}$$

$$F'(x) = f(x).$$

Et puisque si $x \in [0; 1]$ alors $x+1 > 0$, donc $|x+1| = x+1$
donc $F(x) = 3x - 2 \ln(x+1)$.

Ainsi on peut calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{3x+1}{x+1} dx$

en utilisant $I = F(1) - F(0)$

$$I = 3(1) - 2 \ln(1+1) - (3(0) - 2 \ln(0+1))$$

$$I = 3 - 2 \ln(2) + 2 \ln(1)$$

$$I = 3 - 2 \ln(2) \quad I \approx 1,614$$

Remarque: On dit qu'on décompose $\frac{3x+1}{x+1}$ en "éléments simples". Ainsi on peut aussi facilement une primitive des éléments 3 et $-\frac{2}{x+1}$.