

$$1) \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{x^2} dx - \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x^{n+1} e^{x^2} - x^n e^{x^2}) dx$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} (x-1) dx$$

$$\text{Or, } \forall x \in [0;1], \left. \begin{array}{l} x^n \geq 0 \\ e^{x^2} > 0 \\ x-1 \leq 0 \end{array} \right\} \text{ donc } x^n e^{x^2} (x-1) \leq 0$$

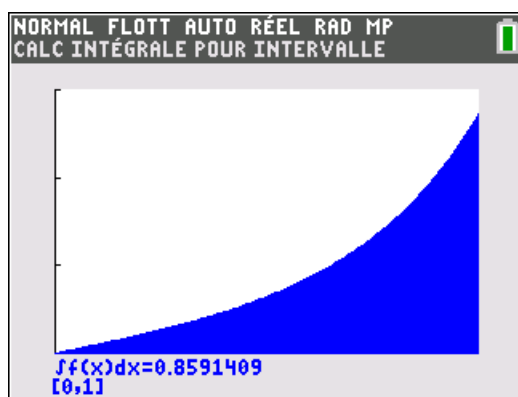
$$\text{Donc, comme } 0 < 1 \text{ on a : } \int_0^1 x^n e^{x^2} (x-1) dx \leq 0$$

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

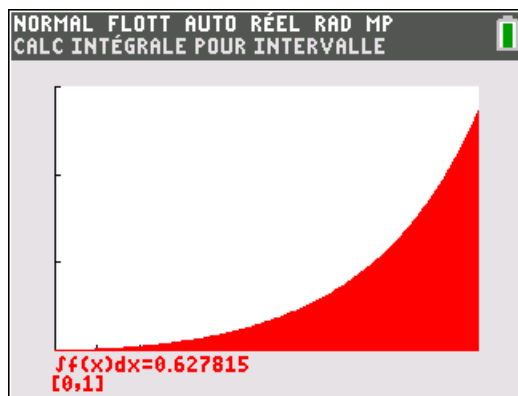
$$I_{n+1} \leq I_n$$

Conclusion : La suite (I_n) est décroissante.

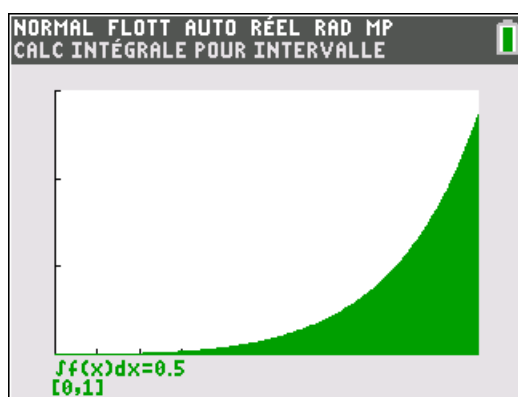
$$n=1 \quad I_1 = \int_0^1 x^1 e^{x^2} dx$$



$$n=2 \quad I_2 = \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx$$



$$n=3 \quad I_3 = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$$



2)

$$\begin{aligned}
 0 &\leq x \leq 1 && \text{car la fonction } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } [0; 1] \\
 0 &\leq x^2 \leq 1 && \text{car la fonction exponentielle est croissante sur } \mathbb{R} \\
 e^0 &\leq e^{x^2} \leq e^1 \\
 1 &\leq e^{x^2} \leq e \\
 x^n &\leq x^n e^{x^2} \leq e x^n && \text{car } x^n > 0 \text{ si } x \in [0; 1]
 \end{aligned}$$

donc $\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e x^n dx$ (car $0 < 1$)

$$\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{e x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

} donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

Donc la suite (I_n) converge vers 0.