

On a un échantillon de $n=1000$ variables aléatoires de Bernoulli X_i telles que $p=0,5$

$$E(X_i) = 0,5$$

$$V(X_i) = pq = 0,25$$

Soit M_{1000} la fréquence observée de Pile.

L'inégalité de concentration de la moyenne empirique s'écrit

$$P(|M_{1000} - E(X)| > t) \leq \frac{V(X)}{1000 t^2}$$

1) En l'appliquant ici avec $t=0,05$

$$P(|M_{1000} - 0,5| > 0,05) \leq \frac{\frac{1}{4}}{1000 \times 0,05^2}$$

$$P(|M_{1000} - 0,5| > 0,05) \leq \frac{1}{4000 \times 0,05^2}$$

$$P(|M_{1000} - 0,5| > 0,05) \leq \frac{1}{10}$$

$$P(|M_{1000} - 0,5| > 0,05) \leq 0,10$$

L'événement contraire est $M_{1000} \in]0,45 ; 0,55[$

$$\text{donc } P(M_{1000} \in]0,45 ; 0,55[) = 1 - P(|M_{1000} - 0,5| > 0,05)$$

$$\text{On a } P(|M_{1000} - 0,5| > 0,05) \leq 0,10$$

$$- P(|M_{1000} - 0,5| > 0,05) \geq -0,10$$

$$1 - P(|M_{1000} - 0,5| > 0,05) \geq 0,90$$

$$\underline{P(0,45 < M_{1000} < 0,55) \geq 0,9}$$

2) En l'appliquant ici avec $t=0,10$

$$P(|M_{1000} - 0,5| > 0,10) \leq \frac{\frac{1}{4}}{1000 \times 0,10^2}$$

$$P(|M_{1000} - 0,5| > 0,10) \leq 0,025$$

L'événement contraire est $M_{1000} \in]0,4 ; 0,6[$

$$\text{donc } P(M_{1000} \in]0,4 ; 0,6[) = 1 - P(|M_{1000} - 0,5| > 0,10)$$

$$\text{on a } 1 - P(|M_{1000} - 0,5| > 0,10) \geq 1 - 0,025$$

$$P(M_{1000} \in]0,4 ; 0,6[) \geq 0,975$$

$$\underline{P(M_{1000} \in]0,4 ; 0,6[) \geq 97,5\%}$$