n°56 p461   X mesure le volume du parfum en mL. $E(X) = \mu = 100$
$V(X) = 1$

1) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est
$$P(|X - E(X)| \geqslant t) \leqslant \frac{V(X)}{t^2} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}^{+*}$$

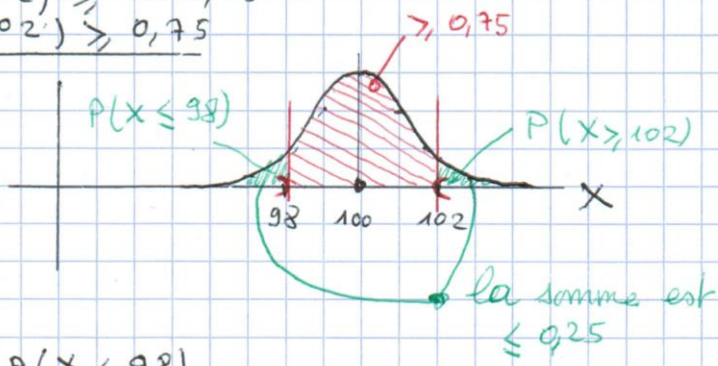
L'énoncé demande de majorer $P(|X - 100| \geqslant 2)$
On a $E(X) = 100$
$V(X) = 1$
$t = 2$

Donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit :
$$P(|X - 100| \geqslant 2) \leqslant \frac{1}{2^2}$$
$$\underline{P(|X - 100| \geqslant 2) \leqslant 0{,}25}$$

2) L'évènement $98 < X < 102$ est l'évènement contraire de l'évènement $|X - 100| \geqslant 2$
Donc $P(98 < X < 102) = 1 - P(|X - 100| \geqslant 2)$
Or on a montré à la question 1) que $P(|X - 100| \geqslant 2) \leqslant 0{,}25$
Donc : $-P(|X - 100| \geqslant 2) \geqslant -0{,}25$
$1 - P(|X - 100| \geqslant 2) \geqslant 1 - 0{,}25$
d'où $\underline{P(98 < X < 102) \geqslant 0{,}75}$

3) On a la situation :
$P(X \leqslant 98) = P(X \geqslant 102)$

$2\,P(X \leqslant 98) \leqslant 0{,}25$



Donc $P(X \leqslant 98) \leqslant 0{,}125$
et comme $P(X < 98) \leqslant P(X \leqslant 98)$
alors $\underline{P(X < 98) \leqslant 0{,}125}$

4) Il y a moins de 12,5% de probabilité que la contenance du parfum liquide soit strictement inférieure à 98 mL.
Le grossiste a observé sur son lot de 1500 flacons une fréquence observée de contenance inférieure à 98 mL égale à $f_{obs} = \frac{200}{1500}$ $f_{obs} = 0{,}133$

Or $\underline{0{,}133 > 0{,}125}$ donc le grossiste peut estimer que la commande reçue <u>n'est pas conforme aux attentes.</u>

5) La loi normale permet d'affirmer que si X suit la loi normale $\mathcal{N}(100\,;1)$ alors $P(X \leqslant 98) = 0{,}02275$
Avec cette valeur, on a une bien meilleure majoration qui est $P(X < 98) \leqslant 0{,}023$

Il y a moins de 2,3% de probabilité que la contenance du parfum soit strictement inférieure à 98 mL

On voit que la fréquence observée $f_{obs} = 0{,}133$ de flacons remplis à moins de 98 mL soit 13,3% des flacons est anormalement élevée.
Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(100\,;1)$ alors la proportion de flacons remplis à moins de 98 mL est environ 2,275%.
Le grossiste ne peut pas reconsidérer la réponse à la question 4.   20