CHAPITRE 2 : Combinatoire et dénombrement

1 Principes additifs et multiplicatifs 2
1.1 Ensemble fini et cardinal 2
1.2 Principe additif 2
1.3 Principe multiplicatif 3
2 *k*-uplets d'un ensemble fini 4
2.1 Nombre de *k*-uplets d'un ensemble à *n* éléments 4
2.2 *k*-uplets d'éléments distincts d'un ensemble, permutations 4
3 Parties d'un ensemble et combinaisons 6
3.1 Nombre de parties d'un ensemble 6
3.2 Combinaison 7
4 Propriétés des combinaisons 9
4.1 Propriétés 9
4.2 Relation et triangle de Pascal 12
4.3 Coefficients binomiaux 16

CHAPITRE 2 : Combinatoire et dénombrement

1 Principes additifs et multiplicatifs

1.1 Ensemble fini et cardinal

Définition

Soit n un entier naturel. Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que E est un **ensemble fini**.

Le nombre n d'éléments de E est appelé **cardinal de $\boldsymbol{E}$**. On le note $Card(E)$.

Exemple

Si $E = \{rouge\ ;\ vert\ ;\ bleu\}$ alors on a $Card(E) = 3$

Remarques

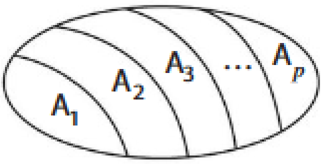
- Cas de l'ensemble vide : $Card(\emptyset) = 0$
- Certains ensembles ne sont pas finis : par exemple l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble des réels de l'intervalle $[0\ ;1]$.

1.2 Principe additif

Propriété

Soient $A_1, A_2, \dots, A_p$ p ensembles finis, deux à deux disjoints. On a :

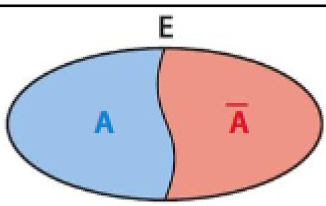
$$Card(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = Card(A_1) + Card(A_2) + \dots + Card(A_p)$$



Corollaire

Soient A une partie d'un ensemble fini E et $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E.

On a : $Card(\bar{A}) = Card(E) - Card(A)$



1.3 Principe multiplicatif

Définition et propriété

Soient E et F deux ensembles non vides.

Le produit cartésien de E par F, noté $E \times F$ (lire « E croix F ») **est l'ensemble des couples** $(x\,;y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$.

Lorsque les ensembles E et F sont finis, $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$.

Remarque

Le signe $\times$ dans $Card(E \times F)$ désigne le *produit cartésien des ensembles* E et F, alors que celui dans $Card(E) \times Card(F)$ symbolise la multiplication de deux entiers.

Exemple

Soient $E = \{2\,;3\,;4\}$ et $F = \{pique\,;carreau\}$. Alors :

$E \times F = \{(2\,;pique)\,;\ (2\,;carreau)\,;\ (3\,;pique)\,;\ (3\,;carreau)\,;\ (4\,;pique)\,;\ (4\,;carreau)\}$ et

$F \times E = \{(pique\,;2)\,;\ (pique\,;3)\ ;\ (pique\,;4)\ ;\ (carreau\,;2)\,;\ (carreau\,;3)\ ;\ (carreau\,;4)\}$.

Définition et propriété

Soient k un entier supérieur ou égal à 2 et $E_1, E_2, \dots, E_k$ k ensembles non vides.

- Toute liste ordonnée $(x_1\,;x_2\,;\dots;x_k)$ avec $x_i \in E_i$ pour i allant de 1 à k est appelée ***k*-uplet** (ou ***k*-liste).**
- L'ensemble de ces k-uplets est **le produit cartésien** $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$
- Lorsque les ensembles $E_1, E_2, \dots, E_k$ sont finis :

$$Card(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \dots \times Card(E_k)$$

Remarques

- Un 2-uplet est un couple et un 3-uplet est un triplet.
- Dans un k-uplet l'ordre compte. Par exemple les couples $(6\,;8)$ et $(8\,;6)$ sont *différents*.

Exemple

Soient $E = \{2\,;3\,;4\}$, $F = \{pique\,;carreau\}$ et $G = \{nord\,;sud\,;est\,;ouest\}$

Le 3-uplet $(pique\,;2\,;ouest)$ est un des éléments du produit cartésien $E \times F \times G$.

2 k-uplets d'un ensemble fini

2.1 Nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments

Définition

Soit k un entier naturel non nul et E un ensemble non vide.

Un k-uplet (ou k-liste) d'éléments de E est un élément du produit cartésien :

$$E^k = E \times E \times \ldots \times E \quad (k \text{ facteurs})$$

Exemple

Si $G = \{nord\,; sud\,; est\,; ouest\}$ alors le 5-uplet $(ouest\,; nord\,; ouest\,; sud\,; ouest)$ est un des éléments du produit cartésien G^5.

Théorème

Soient n et k deux entiers naturels non nuls et E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre de *k*-uplets du produit cartésien E^k est n^k, soit $Card(E^k) = \boldsymbol{n^k}$

Exemple

Soit un ensemble $T = \{A\,; B\,; C\}$ de trois tiroirs.

Un rangement de cinq jetons de couleurs différentes dans les tiroirs A, B, C peut être codé par un 5-uplet du produit cartésien T^5. Par exemple le rangement « le 1er jeton est dans A, le 2e est dans B, le 3e est dans B, le 4e est dans A, le 5e est dans C » correspond au 5-uplet $(A\,; B\,; B\,; A\,; C)$.

Donc si on veut calculer le nombre de rangements de 5 jetons différents dans 3 tiroirs, il suffit de calculer le cardinal de T^5. Ici $Card(T^5) = 3^5 = 243$. Donc il y a 243 rangements possibles.

2.2 k-uplets d'éléments <u>distincts</u> d'un ensemble, permutations

Théorème

Soit n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$. Soit E un ensemble fini de cardinal n. **Le nombre de *k*-uplets d'éléments deux à deux distincts** de E est :

$$\boldsymbol{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)} \quad \text{(dans ce produit il y a } k \text{ facteurs)}$$

Exemple

- Soit un ensemble $T = \{A\,; B\,; C\,; D\,; E\,; F\,; G\,; H\,; I\,; J\,; K\,; L\}$ de douze chevaux. On doit tiercéer sur l'ordre d'arrivée des trois premiers chevaux.
- Par exemple le 3-uplet $(L\,;\ A\,; B)$ signifie que le 1er est le cheval L, le 2^{e} est le cheval A et le 3^{e} est le cheval B.
- Les tiercés tiennent compte de l'ordre ($(L\,;\ A\,; B)$ et $(L\,;\ B\,; A)$ sont des tiercés différents)
- Il n'y a pas de répétition possible : $(L\,;\ A\,; A)$ n'est pas un tiercé.

Combien y a-t-il de tiercés possibles en tenant compte de l'ordre d'arrivée ?

Réponse :

- On a 12 possibilités pour le 1er, de 11 possibilités pour le 2^{e} et de 10 possibilités pour le 3^{e}.
- **Les tiercés en tenant compte de l'ordre sont les 3-uplets** d'éléments deux à deux distincts de l'ensemble $T = \{A\,; B\,; C\,; D\,; E\,; F\,; G\,; H\,; I\,; J\,; K\,; L\}$.
- Leur nombre est $12 \times 11 \times 10 = 1320$.

Définition

On appelle **permutation** d'un ensemble E à n éléments tout *n*-uplet d'éléments deux à deux distincts de E.

Exemple

Les permutations de l'ensemble $E = \{a\,; b\,; c\}$ sont :

$$(a\,; b\,; c), (a\,; c\,; b), (b\,; a\,; c), (b\,; c\,; a), (c\,; a\,; b), (c\,; b\,; a)$$

Théorème et définition

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ($n \geq 1$) est le nombre $\boldsymbol{n}!$ (qui se lit « factorielle n » ou « n factorielle ») défini par : $\boldsymbol{n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 2 \times 1}$.

Dans l'exemple précédent, l'ensemble E a 3 éléments.

Le nombre de permutations (ou nombre de « rangements » de ses éléments) est $3! = 6$.

Remarque

On convient que $0! = 1$

(Il n'y a qu'une façon de « ranger » l'ensemble vide puisqu'il ne contient aucun élément).

3 Parties d'un ensemble et combinaisons

3.1 Nombre de parties d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble. Dire qu'un ensemble F est une partie de E (ou que F est **un sous-ensemble** de E, ou que F est inclus dans E) signifie que tous les éléments de F sont des éléments de E. On note alors $F \subset E$.

Remarque

Il ne faut pas confondre une partie d'un ensemble avec un *k*-uplet. Dans une partie (qu'on note entre accolades), l'ordre des éléments n'a pas d'importance. Par exemple $\{1 ; 2\}$ et $\{1 ; 2\}$ dont *identiques*.

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{a ; b ; c ; d\}$. Les ensembles $A = \{a ; c\}$ et $B = \emptyset$ sont des parties de E.

Théorème

Soit n un entier naturel. **Le nombre de parties d'un ensemble** incluses dans un ensemble E à n éléments est égal au nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0 ; 1\}$ c'est-à-dire $\mathbf{2^n}$.

Cela correspond au fait que pour constituer une partie d'un ensemble E à n éléments, on a n choix successifs avec 2 possibilités : prendre ou ne pas prendre chaque élément de E.

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{a ; b ; c; d\}$. Il y a $2^4 = 16$ parties de E.

a ?	b ?	c ?	d ?	Partie de E	4-uplets de l'ensemble $\{0 ; 1\}$
oui	oui	oui	oui	$\{a ; b ; c ; d\}$	(1 ;1 ;1 ;1)
oui	oui	oui	non	$\{a ; b ; c\}$	(1 ;1 ;1 ;0)
oui	oui	non	oui	$\{a ; b ; d\}$	(1 ;1 ;0 ;1)
oui	oui	non	non	$\{a ; b\}$	(1 ;1 ;0 ;0)
oui	non	oui	oui	$\{a ; c ; d\}$	(1 ;0 ;1 ;1)
oui	non	oui	non	$\{a ; c\}$	(1 ;0 ;1 ;0)
oui	non	non	oui	$\{a ; d\}$	(1 ;0 ;0 ;1)
oui	non	non	non	$\{a\}$	(1 ;0 ;0 ;0)
non	oui	oui	oui	$\{b ; c ; d\}$	(0 ;1 ;1 ;1)
non	oui	oui	non	$\{b ; c\}$	(0 ;1 ;1 ;0)
non	oui	non	oui	$\{b ; d\}$	(0 ;1 ;0 ;1)
non	oui	non	non	$\{b\}$	(0 ;1 ;0 ;0)
non	non	oui	oui	$\{c ; d\}$	(0 ;0 ;1 ;1)
non	non	oui	non	$\{c\}$	(0 ;0 ;1 ;0)
non	non	non	oui	$\{d\}$	(0 ;0 ;0 ;1)
non	non	non	non	$\emptyset$	(0 ;0 ;0 ;0)

Remarque

On appelle **mot de longueur $\boldsymbol{n}$** sur l'alphabet $A = \{a\,;b\}$ **un $\boldsymbol{n}$-uplet d'éléments** de A. Par exemple, $(a\,;b\,;b\,;a)$ est un mot de longueur 4 sur l'alphabet A. Il y a 2^4 mots de longueur 4.

De façon générale, si on a un alphabet à 2 lettres, il est possible de faire 2^n mots de longueur n.

3.2 Combinaison

Définition

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$ et E un ensemble fini de cardinal n. On appelle **combinaison de $\boldsymbol{k}$ éléments de $\boldsymbol{E}$** toute **partie de $\boldsymbol{E}$** ayant k éléments.

Exemple

- Soit un ensemble $T = \{A\,;B\,;C\,;D\,;E\,;F\,;G\,;H\,;I\,;J\,;K\,;L\}$ de douze chevaux. On doit tiercéer sur les trois premiers chevaux <u>en ne tenant pas compte de l'ordre</u>. Il faut juste dire les noms des trois premiers, sans préciser le 1er , le 2e , le 3e .
- Par exemple la combinaison de 3 éléments $\{A\,;B\,;L\}$ signifie que dans les trois chevaux de tête il y a A, B et L mais sans préciser qui est premier, deuxième et troisième.
- Les **tiercés ne tiennent pas compte** de l'ordre ($\{A\,;B\,;L\}$ et $\{A\,;L\,;B\}$ sont des tiercés identiques)
- Il n'y a pas de répétition possible : $\{A\,;B\,;A\}$ n'est pas un tiercé.

Combien y a-t-il de tiercés sans tenir compte de l'ordre ?

Réponse :

- Dans l'exemple des tiercés dans l'ordre, on a vu que leur nombre est $12 \times 11 \times 10 = 1320$.
- Mais ici, on ne fait pas de différence entre les tiercés $(A\,;B\,;L), (A\,;L\,;B), (B\,;A\,;L), (B\,;L\,;A), (L\,;A\,;B), (L\,;B\,;A)$.
- Ces six tiercés dans l'ordre correspondent à un seul tiercé sans tenir compte de l'ordre qui est $\{A\,;B\,;L\}$.
- Le même principe s'applique aux 1320 tiercés dans l'ordre. Ils peuvent tous être regroupés par « paquets » de 6, chaque paquet correspondant à un tiercé sans tenir compte de l'ordre.
- Donc finalement, il y a $\frac{1320}{6} = 220$ tiercés en ne tenant pas compte de l'ordre.
- Par exemple on a $\{A\,;B\,;L\}, \{A\,;C\,;D\}$, $\{D\,;F\,;H\}$ …
- Remarquer la notation entre accolades quand l'ordre ne compte pas ; Ce sont des ensembles (des sous ensembles à 3 éléments parmi 12).

Ce nombre est noté $\binom{12}{3}$ et se lit « 3 parmi 12 ». C'est le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 12. On l'a obtenu en divisant 1320 par le nombre de permutations de 3 éléments :

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!}$$

Remarque :

Le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 12 correspond au nombre de façon de **choisir 3 positions - sans tenir compte de l'ordre - parmi 12 positions**.

- Par exemple, il y a 220 façons d'avoir 3 fenêtres allumées sur les 12 que compte une maison.
- Il y a 220 façons de placer 3 lettres « a » dans un mot de 12 lettres écrit dans un alphabet qui ne contient que les lettres « a » et « b », par exemple le mot $(a, a, b, b, b, b, b, a, b, b, b, b)$.

Propriétés

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. **Le nombre de combinaisons de $\boldsymbol{k}$ éléments d'un ensemble à $\boldsymbol{n}$ éléments**, noté $\binom{n}{k}$ est donné par

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!\,\boldsymbol{k}!}$$

On peut simplifier si $k \neq 0$:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n}-\mathbf{1}) \times \ldots \times (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}{\boldsymbol{k}!}$$

Exemple : Calculer $\binom{12}{3}$

Calcul à la main : n = 12 ; k = 3 ; n – k = 9

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{9! \times 3!}$$

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9! \times 3!}$$

en simplifiant :

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!}$$

$$\binom{12}{3} = 220$$

A la calculatrice :

- Saisissez « 12 » et appuyez sur la touche **math.**
- Allez dans le menu **PROB.**
- Choisissez **Combinaison.**
- Ajoutez le « 3 » pour faire apparaitre cette écriture : $_{\mathbf{12}}\boldsymbol{C}_{\mathbf{3}}$ (une autre notation pour $\binom{12}{3}$).
- Appuyez sur la touche **entrer**. On a 220 qui est le nombre de combinaisons de 3 parmi 12.

4 Propriétés des combinaisons

4.1 Propriétés

- $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{0}} = \mathbf{1}$. Dans un ensemble à n éléments, il y a une seule partie à 0 élément : la partie vide.

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$. $n = 4$ est le cardinal de E. $\binom{4}{0} = \mathbf{1}$

a ?	b ?	c ?	d ?	Partie de E	k le nombre d'éléments dans la partie
oui	oui	oui	oui	$\{a\,;b\,;c\,;d\}$	4
oui	oui	oui	non	$\{a\,;b\,;c\}$	3
oui	oui	non	oui	$\{a\,;b\,;d\}$	3
oui	oui	non	non	$\{a\,;b\}$	2
oui	non	oui	oui	$\{a\,;c\,;d\}$	3
oui	non	oui	non	$\{a\,;c\}$	2
oui	non	non	oui	$\{a\,;d\}$	2
oui	non	non	non	$\{a\}$	1
non	oui	oui	oui	$\{b\,;c\,;d\}$	3
non	oui	oui	non	$\{b\,;c\}$	2
non	oui	non	oui	$\{b\,;d\}$	2
non	oui	non	non	$\{b\}$	1
non	non	oui	oui	$\{c\,;d\}$	2
non	non	oui	non	$\{c\}$	1
non	non	non	oui	$\{d\}$	1
non	non	non	non	$\emptyset$	**0**

- $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{n}$. Dans un ensemble à n éléments, il y a n parties à 1 élément.

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$. $n = 4$ est le cardinal de E. $\binom{4}{1} = \mathbf{4}$

a ?	b ?	c ?	d ?	Partie de E	k le nombre d'éléments dans la partie
oui	oui	oui	oui	$\{a\,;b\,;c\,;d\}$	4
oui	oui	oui	non	$\{a\,;b\,;c\}$	3
oui	oui	non	oui	$\{a\,;b\,;d\}$	3
oui	oui	non	non	$\{a\,;b\}$	2
oui	non	oui	oui	$\{a\,;c\,;d\}$	3
oui	non	oui	non	$\{a\,;c\}$	2
oui	non	non	oui	$\{a\,;d\}$	2
oui	non	non	non	$\{\boldsymbol{a}\}$	**1**
non	oui	oui	oui	$\{b\,;c\,;d\}$	3
non	oui	oui	non	$\{b\,;c\}$	2
non	oui	non	oui	$\{b\,;d\}$	2
non	oui	non	non	$\{\boldsymbol{b}\}$	**1**
non	non	oui	oui	$\{c\,;d\}$	2
non	non	oui	non	$\{\boldsymbol{c}\}$	**1**
non	non	non	oui	$\{\boldsymbol{d}\}$	**1**
non	non	non	non	$\emptyset$	0

- $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{n(n-1)}}{\boldsymbol{2}}$. Dans un ensemble à n éléments, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ parties à 2 éléments.

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$. $n = 4$ est le cardinal de E. $\binom{4}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = \mathbf{6}$

a ?	b ?	c ?	d ?	Partie de E	k le nombre d'éléments dans la partie
oui	oui	oui	oui	$\{a\,;b\,;c\,;d\}$	4
oui	oui	oui	non	$\{a\,;b\,;c\}$	3
oui	oui	non	oui	$\{a\,;b\,;d\}$	3
oui	oui	non	non	$\{\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}\}$	**2**
oui	non	oui	oui	$\{a\,;c\,;d\}$	3
oui	non	oui	non	$\{\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{c}\}$	**2**
oui	non	non	oui	$\{\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{d}\}$	**2**
oui	non	non	non	$\{a\}$	1
non	oui	oui	oui	$\{b\,;c\,;d\}$	3
non	oui	oui	non	$\{\boldsymbol{b}\,;\boldsymbol{c}\}$	**2**
non	oui	non	oui	$\{\boldsymbol{b}\,;\boldsymbol{d}\}$	**2**
non	oui	non	non	$\{b\}$	1
non	non	oui	oui	$\{\boldsymbol{c}\,;\boldsymbol{d}\}$	**2**
non	non	oui	non	$\{c\}$	1
non	non	non	oui	$\{d\}$	1
non	non	non	non	$\emptyset$	0

- $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}} = \mathbf{1}$. Dans un ensemble E à n éléments, il y a 1 partie à n éléments : c'est l'ensemble E.

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$. $n = 4$ est le cardinal de E. $\binom{4}{4} = \mathbf{1}$

a ?	b ?	c ?	d ?	Partie de E	k le nombre d'éléments dans la partie
oui	oui	oui	oui	$\{\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}\,;\boldsymbol{c}\,;\boldsymbol{d}\}$	**4**
oui	oui	oui	non	$\{a\,;b\,;c\}$	3
oui	oui	non	oui	$\{a\,;b\,;d\}$	3
oui	oui	non	non	$\{a\,;b\}$	2
oui	non	oui	oui	$\{a\,;c\,;d\}$	3
oui	non	oui	non	$\{a\,;c\}$	2
oui	non	non	oui	$\{a\,;d\}$	2
oui	non	non	non	$\{a\}$	1
non	oui	oui	oui	$\{b\,;c\,;d\}$	3
non	oui	oui	non	$\{b\,;c\}$	2
non	oui	non	oui	$\{b\,;d\}$	2
non	oui	non	non	$\{b\}$	1
non	non	oui	oui	$\{c\,;d\}$	2
non	non	oui	non	$\{c\}$	1
non	non	non	oui	$\{d\}$	1
non	non	non	non	$\emptyset$	0

- Pour tous entiers n et k vérifiant $0 \leq k \leq n$, $\boldsymbol{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$

Exemples :

- On considère l'ensemble $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$. $n = 4$ est le cardinal de E. Il y a autant de parties de E à 1 élément que de parties de E à 3 éléments. Choisir de prendre 1 élément parmi 4 est équivalent à choisir de ne pas prendre 3 éléments parmi 4.
- Il y a 220 façons d'avoir 3 fenêtres allumées sur les 12 que compte une maison. Donc il y a aussi 220 façons d'avoir 9 fenêtres allumées sur les 12.
- Soit un alphabet qui ne contient que deux lettre $A = \{a\,;b\}$. On peut former 220 mots différents de 12 lettres qui contiennent 3 « a » et 9 « b » : $(a, a, b, b, b, b, b, a, b, b, b, b)$…
  Il y a aussi 220 mots différents de 12 lettres qui contiennent 9 « a » et 3 « b » par exemple le mot $(b, b, a, a, a, a, a, b, a, a, a, a)$.

$$\binom{12}{3} = \binom{12}{9}$$

Propriété

Pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Exemple : Le nombre de parties de l'ensemble $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$ avec $n = 4$ est $2^4 = 16$.

Nombre de parties à 0 élément	$\binom{4}{0} = 1$
Nombre de parties à 1 élément	$\binom{4}{1} = 4$
Nombre de parties à 2 éléments	$\binom{4}{2} = 6$
Nombre de parties à 3 éléments	$\binom{4}{3} = 4$
Nombre de parties à 4 éléments	$\binom{4}{4} = 1$
TOTAL	$2^4 = 16$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} = 2^4$$

Démonstration Puisque $\boldsymbol{\binom{n}{0}}, \boldsymbol{\binom{n}{1}}, \boldsymbol{\binom{n}{2}}, \dots, \boldsymbol{\binom{n}{n}}$ sont les nombres de parties à 0 élément, 1 élément, 2 éléments, … , n éléments d'un ensemble E de cardinal n et que le nombre de parties d'un tel ensemble est 2^n, alors la somme

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

4.2 Relation et triangle de Pascal

- ***Théorème (relation de Pascal[1])***

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout entier naturel k vérifiant $1 \leq k \leq n-1$ on a :

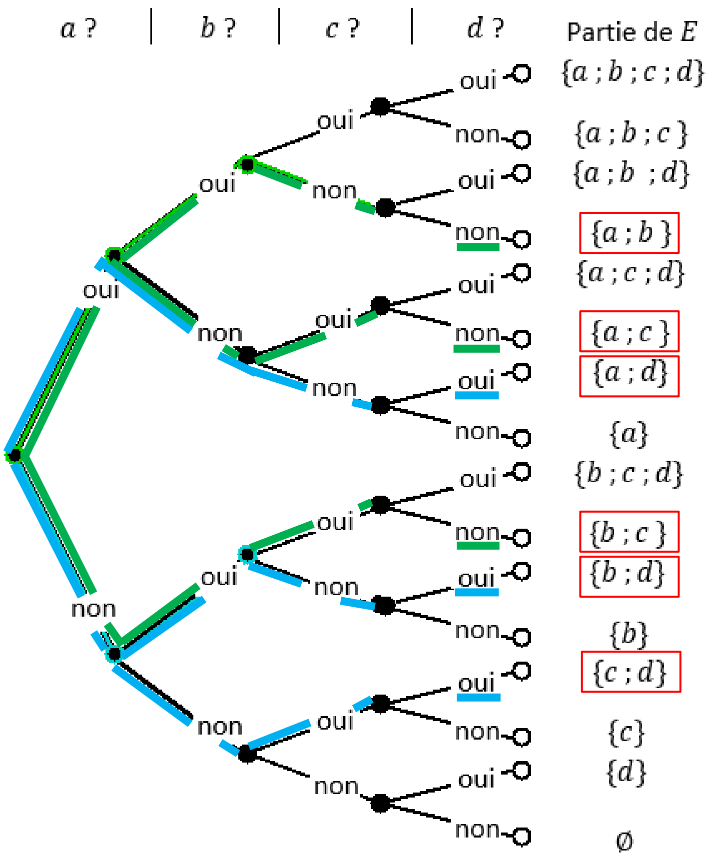
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Exemple avec $n = 4$ et $k = 2$

On peut présenter sous forme d'arbre la fabrication des parties de l'ensemble $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$.

Pour fabriquer une partie à 2 éléments parmi 4, on peut :

- Prendre 1 élément parmi $\{a\,;b\,;c\}$ et prendre d, ce qui donne $\binom{3}{1} = 3$ possibilités.
- Prendre 2 éléments parmi $\{a\,;b\,;c\}$ et ne pas prendre d, ce qui donne $\binom{3}{2} = 3$ possibilités.



Ainsi, selon le principe additif, le nombre de parties à 2 éléments parmi 4 est : $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$

[1] **Blaise Pascal** (1623 – 1662) est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe français.

- Exploitation de la relation de Pascal pour calculer les coefficients $\binom{n}{k}$

On peut construire un tableau avec, en lignes, les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ et, en colonnes, les valeurs de $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

- Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{0}} = \mathbf{1}$ alors **on remplit la première colonne de 1.**
- Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}} = \mathbf{1}$ alors **on remplit la diagonale de 1.**

$n \backslash k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1		1		
3	1			1	
4	1				1

- Puisque $\binom{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} = \binom{\mathbf{1}}{\mathbf{0}} + \binom{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}$ alors **on remplit toute la ligne n = 2.**

$n \backslash k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1 +	1			
2	1	$\|$ 2	1		
3	1			1	

- Puisque $\textcolor{red}{\binom{3}{1}} = \textcolor{cyan}{\binom{2}{0}} + \textcolor{green}{\binom{2}{1}}$ **et** $\textcolor{red}{\binom{3}{2}} = \textcolor{cyan}{\binom{2}{1}} + \textcolor{green}{\binom{2}{2}}$ **on remplit toute la ligne n = 3.**

n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1 +	2	1		
3	1	$\parallel$ 3	3	1	

n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2 +	1		
3	1	3	$\parallel$ 3	1	

- On remplit **la ligne n = 4…**

n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1 +	3	3	1	
4	1	$\parallel$ 4	6	4	1

n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3 +	3	1	
4	1	4	$\parallel$ 6	4	1

Pour compléter la ligne, on peut utiliser la symétrie $\binom{4}{3} = \binom{4}{1}$. On peut obtenir un tableau aussi grand que l'on veut dans lequel à l'intersection de la ligne n et de la colonne k, on lit l'entier $\binom{n}{k}$.

- Puisque k est toujours inférieur ou égal à n, il manque une partie du carré. Ce tableau est appelé **triangle de Pascal**.

Démonstration de la relation de Pascal. 1ere méthode : par le calcul

Montrons que pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout entier naturel k vérifiant $1 \leq k \leq n-1$ on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

On sait que

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!}$$

Calculons $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)\times\ldots\times((n-1)-(k-1)+1)}{(k-1)!}+\frac{(n-1)\times\ldots\times((n-1)-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)\times\ldots\times(n-1-k+1+1)}{(k-1)!}+\frac{(n-1)\times\ldots\times(n-1-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)}{(k-1)!}+\frac{(n-1)\times\ldots\times(n-k)}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{[(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)]\times k}{(k-1)!\times k}+\frac{(n-1)\times\ldots\times(n-k)}{k\,!}$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{[(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)]\times k+(n-1)\times\ldots\times(n-k)}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{[(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)]\times k+(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)\times(n-k)}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{[(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)]\times k+(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)\times(n-k)}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)\times[k+(n-k)]}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)\times[n]}{k!}$$

Or,

$$\binom{n}{k}=\frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)}{k!}$$

donc pour tout entier naturel $n\geq 2$ et pour tout entier naturel k vérifiant $1\leq k\leq n-1$:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

Démonstration de la relation de Pascal. 2e méthode : par une méthode combinatoire

On reprend le raisonnement de l'***exemple*** vu au début de ce paragraphe, mais en le généralisant.

On considère l'ensemble $E=\{a\,;\ldots\,;\ldots\,;\ldots\ldots\}$ qui contient au moins $n=2$ éléments dont a

Pour fabriquer une partie à k éléments parmi n, on peut :

- Prendre $k-1$ éléments dans E privé de $\{a\}$ et prendre a, ce qui donne $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.
- Prendre k éléments dans E privé de $\{a\}$ et ne pas prendre a, ce qui donne $\binom{n-1}{k}$possibilités.

Ainsi, selon le principe additif $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$

4.3 Coefficients binomiaux

Pour tous réels a et b $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ce qui peut s'écrire :

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^{2-0} b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2$$

Pour tous réels a et b $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ce qui peut s'écrire :

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^{3-0} b^0 + \binom{3}{1} a^{3-1} b^1 + \binom{3}{2} a^{3-2} b^2 + \binom{3}{3} a^{3-3} b^3$$

$(a+b)^2$, $(a+b)^3$ sont des cas particuliers de $(a+b)^n$ avec $n = 2$ ou $n = 3$.

On démontre que pour tout entier $n \geq 1$:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n$$

Cela s'écrit, en écriture condensée avec le symbole « sigma » :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

C'est la **formule du binôme de Newton**[2] et les entiers $\binom{n}{k}$ **sont les coefficients binomiaux.**

Exemple $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Algorithme

La construction du triangle de Pascal permet d'écrire un algorithme de calcul des coefficients $\binom{n}{k}$

Algorithme

```
Fonction comb(n,k)
    Si k=0 ou k=n alors
        Renvoyer 1
    Sinon
        Renvoyer comb(n-1,k-
        1)+comb(n-1,k)
    FinSi
```

Script en Python

```
ÉDITEUR : DENOMBRE
LIGNE DU SCRIPT 0006
def comb(n,k):
  if k==0 or k==n:
    return 1
  else:
    return comb(n-1,k-1)+comb(n-
     1,k)
```

Ensuite, on exécute le script DENOMBRE puis on choisit la fonction comb (touche var de la TI83)

```
>>> comb(4,2)
6
```

On retrouve bien la valeur de la combinaison $\binom{4}{2} = 6$.

---

[2] **Isaac Newton** : 1642 - 1727 est un mathématicien et physicien anglais.