CHAPITRE 10 : Loi des grands nombres

[1 Transformation affine d'une variable aléatoire 2](#_Toc72071836)

[1.1 Activité 2](#_Toc72071837)

[1.2 Transformation affine d'une variable aléatoire X 5](#_Toc72071838)

[2 Somme de deux variables aléatoires 5](#_Toc72071839)

[2.1 Activité 5](#_Toc72071840)

[2.2 Somme de deux variables aléatoires 9](#_Toc72071841)

[3 Démonstration des formules de l'espérance et de la variance de la loi binomiale 9](#_Toc72071842)

[3.1 Décomposition d'une variable aléatoire *X* suivant une loi binomiale 10](#_Toc72071843)

[3.2 Épreuve de Bernoulli, variable *X*1 suivant une loi de Bernoulli 10](#_Toc72071844)

[3.3 Formules de l'espérance et de la variance pour une variable aléatoire *X* qui suit une loi binomiale 11](#_Toc72071845)

[4 Échantillon de taille *n* d'une loi de probabilité *X* 16](#_Toc72071846)

[4.1 Définition d'un échantillon de taille *n* d'une loi de probabilité sur un exemple 16](#_Toc72071847)

[4.2 Espérance, variance et écart-type de la somme *Sn*= *X*1 + *X*2 +…+ *Xn*  et de la moyenne empirique *Mn*= *Sn* /*n* à l'aide de l'exemple précédent 16](#_Toc72071848)

[4.3 Définition d'un échantillon d'une loi de probabilité 19](#_Toc72071849)

[5 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev 21](#_Toc72071850)

[5.1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev sur un exemple 21](#_Toc72071851)

[5.2 Formule de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev 24](#_Toc72071852)

[5.3 Exemple d'utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev 26](#_Toc72071853)

[5.4 Cas de la loi binomiale 26](#_Toc72071854)

[6 Inégalité de concentration de la moyenne empirique 30](#_Toc72071855)

[7 Loi des grands nombres 34](#_Toc72071856)

CHAPITRE 10 : Loi des grands nombres

# Transformation affine d'une variable aléatoire

## Activité

On considère le jeu suivant :

On tourne une roue coupée en 10 sections de même aire.

5 sections portent la mention « −1 » signifiant que l’on perd 1 euro si la roue s’arrête sur l’une de ces sections.

2 sections portent la mention « 0 » signifiant que l’on ne gagne rien.

2 sections portent la mention « 1 » signifiant que l’on gagne un euro.

1 section porte la mention « 2 » signifiant que l’on gagne 2 euros.

On note la variable aléatoire égale au gain algébrique (pouvant être négatif en cas de perte) du joueur lors d’une partie.

1. a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire .

*Réponse*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | TOTAL |
|  |  |  |  |  |  |

* 1. Calculer l'espérance la variance et l'écart-type

*Réponse*

1. On décide de garder le même principe que précédemment mais de modifier les gains et pertes mentionnés sur les sections de la manière suivante : On double les valeurs puis on leur ajoute 3.

On note la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur lors d’une partie avec cette nouvelle situation.

* 1. Exprimer la variable aléatoire en fonction de la variable aléatoire .

*Réponse*

* 1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

*Réponse*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | TOTAL |
|  |  |  |  |  |  |

* 1. Calculer Comparer à .

*Réponse*

D'autre part :

Donc

c’est-à-dire

* 1. Calculer . Comparer à .

*Réponse*

D'autre part :

Donc

c’est-à-dire

* 1. Calculer . Comparer à .

*Réponse*

D'autre part :

Donc

c’est-à-dire

## Transformation affine d'une variable aléatoire X

Soit une variable aléatoire et et deux nombres réels.

Les valeurs prises par sont .

La variable aléatoire définie par est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les réels :

La variable est obtenue à partir de la variable par une transformation affine (par analogie avec l’expression d’une fonction affine ).

Si alors on a :

La multiplication par et l'addition de ont toutes les deux une influence sur l’espérance.

On remarque que, puisque l'addition d'une constante à toutes les valeurs de n'a pas d'influence sur la variance c’est-à-dire sur la dispersion de .

# Somme de deux variables aléatoires

## Activité

On considère le jeu suivant qui se déroule en deux parties. Ces deux parties sont obligatoires. On ne peut pas s'arrêter après la première partie.

Première partie :

* On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. On regarde si on tombe sur un nombre pair ou impair. Si le nombre est pair alors on gagne 10 €. Si le nombre est impair on gagne 5 €.

Deuxième partie :

On relance le dé. Si on tombe sur 1 ou 2 alors on gagne 5 €. Si on tombe sur 3 alors on gagne 2 €. Si on tombe sur 4, 5 ou 6 on ne gagne rien.

 est la variable aléatoire donnant le gain à la première partie. est la variable aléatoire donnant le gain à la deuxième partie.

1. Donner les lois de probabilités de et .

*Réponse*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | TOTAL |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | TOTAL |
|  |  |  |  |  |

1. Calculer et ainsi que et

*Réponse*

1. On note la variable aléatoire donnant la somme des gains des deux jeux.
	1. Exprimer en fonction des variables aléatoires et .

*Réponse :*

* 1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire qui donne le gain total cumulé.

*Réponse :* On fait un arbre pour visualiser toutes les possibilités et en regrouper certaines.

****

On résume dans un tableau la somme de tous les gains possibles.

Sur la première ligne on a mis toutes les valeurs possibles prises par .

Sur la première colonne on a mis toutes les valeurs possibles prises par .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

On en déduit la loi de probabilité de la variable aléatoire somme

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | TOTAL |
|  |  |  |  |  |  |  |

* 1. Calculer

*Réponse*

* 1. Comparer avec

*Réponse*

D'autre part :

Donc

c’est-à-dire

* 1. Calculer

*Réponse*

* 1. Les deux parties sont-elles des expériences aléatoires indépendantes ?

*Réponse*

Oui, puisque le résultat de la première partie n'intervient pas sur le résultat de la deuxième partie.

* 1. Comparer avec

*Réponse*

On a précédemment trouvé et

Donc

Et comme , alors

c’est-à-dire, que dans le cas de deux **variables aléatoires indépendantes** et on a :

## Somme de deux variables aléatoires

 et sont deux variables aléatoires.

 est la variable qui prend pour valeurs les sommes des valeurs possibles de et de .

On a alors :

 (linéarité de l’espérance pour l'addition).

Si et sont associées à deux **expériences aléatoires indépendantes** (on dit alors que les variables aléatoires et sont indépendantes : les résultats de l’une n’ont pas d’influence sur les résultats de l’autre) alors

Dans le cas où les expériences ne sont pas indépendantes, il se peut que

# Démonstration des formules de l'espérance et de la variance de la loi binomiale

L’objectif de cette partie est de *démontrer* que si la variable suit une loi binomiale alors et

Ces formules ont été admises dans le chapitre 4.Loi binomiale.

## Décomposition d'une variable aléatoire *X* suivant une loi binomiale

* On décompose la variable aléatoire comme une somme de variables aléatoires plus simples.
* La variable aléatoire qui suit la loi binomiale se décompose en :

où les variables aléatoires sont des **variables aléatoires indépendantes** qui suivent toutes la même loi de Bernoulli

## Épreuve de Bernoulli, variable *X*1 suivant une loi de Bernoulli

Une *épreuve de Bernoulli* est une épreuve aléatoire à 2 issues « succès » ou « échec ». La probabilité du succès est .

*X*1

0

1

Si est une variable aléatoire qui compte le nombre de "succès" lors d’une épreuve de Bernoulli alors sa loi de probabilité est la loi de Bernoulli notée donnée par le tableau suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Valeurs de  |  |  | TOTAL |
|  |  |  |  |

Que valent ) et ?

*Réponse :*

Si suit la loi de Bernoulli de paramètre , alors :

Si suit la loi de Bernoulli de paramètre , alors :

Si suit la loi de Bernoulli de paramètre , alors :

## Formules de l'espérance et de la variance pour une variable aléatoire *X* qui suit une loi binomiale

***Activité 1***

Soit la variable aléatoire qui suit la loi binomiale

On peut considérer deux tirages successifs identiques et indépendants avec comme probabilité du succès et comme probabilité de l'échec .

* Aussi *on peut considérer que la variable aléatoire est la somme de deux variables aléatoires* et qui suivent toutes les deux la loi de Bernoulli . Les variables et prennent la valeur en cas de "succès" et en cas d' "échec".



On résume dans un tableau toutes les valeurs possibles de la somme selon les valeurs de et

Sur la première ligne on a mis toutes les valeurs possibles prises par .

Sur la première colonne on a mis toutes les valeurs possibles prises par .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

D'où la loi de probabilité de la somme :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | TOTAL |
|  |  |  |  |  |

On retrouve bien la loi binomiale

1. Calculer

*Réponse*

Au lieu de calculer l'espérance par la formule

nous utilisons un résultat vu précédemment :

 (linéarité de l’espérance).

Les variables aléatoires et suivent la loi de Bernoulli de paramètre donc

Donc a pour espérance :

1. Calculer

*Réponse*

Au lieu de calculer l'espérance par la formule

nous utilisons un résultat vu précédemment :

 (utilisable lorsque les expériences associées aux variables aléatoires sont indépendantes, ce qui est le cas puisque suit une loi binomiale).

Les variables aléatoires et suivent la loi de Bernoulli de paramètre donc

Donc a pour espérance :

***Activité 2***

On considère la variable aléatoire définie par :

 où les variables aléatoires sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de Bernoulli

 est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès à la épreuve. prend la valeur 0 en cas d'échec et la valeur 1 en cas de succès. donne le nombre de succès au total sur épreuves.

1. Retrouver la formule de en utilisant la propriété de linéarité de l’espérance.
2. Retrouver la formule de et en utilisant le fait que est une somme de variables aléatoires indépendantes.

*Réponse :*

1. Les variables , prennent la valeur en cas de "succès" et en cas d' "échec".

 par linéarité de l'espérance.

Les variables aléatoires suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre (probabilité d'avoir un "succès" à une épreuve) donc :

Donc a pour espérance :

1. est une somme de **variables aléatoires indépendantes**. Dans ce cas, on a vu que la variance vérifie la propriété :

Les variables aléatoires suivent la loi de Bernoulli de paramètre (probabilité d'avoir un "succès" à une épreuve) donc :

Donc a pour variance :

Écart-type de la variable aléatoire qui suit la loi binomiale

# Échantillon de taille *n* d'une loi de probabilité *X*

## Définition d'un échantillon de taille *n* d'une loi de probabilité sur un exemple

***Exemple***

* En France en 2018, selon l’INSEE, 75,4 % des individus de 15 à 29 ans ont réalisé un achat sur internet au cours des 12 derniers mois.
* On interroge 500 personnes de la population française, âgées d’entre 15 et 29 ans, pour savoir si elles ont réalisé un achat sur internet au cours des 12 derniers mois.
* Au vu de la taille de la population française, on suppose que les tirages au sort successifs ne changent pas les probabilités que la réponse soit positive ou non, et donc ce prélèvement de 500 personnes par tirage au sort peut être assimilé à un tirage avec remise.
* On considère la liste des variables où vaut 1 si la i-ème personne a réalisé un achat internet au cours des 12 mois et 0 sinon, afin de modéliser l’enquête auprès des 500 personnes.
* **Un échantillon** de taille **d’une loi de probabilité est une** **liste**  **de** **variables aléatoires indépendantes et identiques** suivant cette loi.

Expliquer pourquoi la liste peut être considérée comme un échantillon de variables aléatoires en précisant la loi suivie par les variables aléatoires .

*Réponse*

Un échantillon de taille de la population est constitué d'une liste de réponses "1" si la personne a répondu "oui" et "0" si la personne a répondu "non".

Chacune des réponses peut être considérée comme étant la valeur d'une variable aléatoire ne pouvant prendre que deux valeurs 0 ou 1.

Donc L'échantillon de taille peut être vu comme étant la liste des réponses. Par exemple on obtient la liste qui contient 500 nombres traduisant que la 1ere personne a répondu "**oui**", le 2e "**non**", les trois suivantes "**oui**" etc.

## Espérance, variance et écart-type de la somme *Sn*= *X*1 + *X*2 +…+ *Xn*  et de la moyenne empirique *Mn*= *Sn* /*n* à l'aide de l'exemple précédent

***Suite de l'exemple***

1. Soit .
	1. Calculer ). Exprimer ) en fonction de ).
	2. Calculer ). Exprimer ) en fonction de ).

*Réponse*

* 1. Par linéarité de l'espérance, on a :

Or chacune des variables aléatoires suit la même loi de Bernoulli de paramètre , donc chacune a la même espérance et cette espérance est égale au paramètre .

* 1. Puisque les 500 variables aléatoires de la liste sont indépendantes, alors :

Les variables aléatoires et suivent la loi de Bernoulli de variance ( probabilité d'avoir un "succès" à une épreuve et probabilité d'avoir un "échec") donc :

Donc a pour variance :

1. On considère la **moyenne "empirique" des 500 variables aléatoires**

Elle représente la probabilité de réponse "oui" par individu.

* 1. Calculer Exprimer en fonction de ).
	2. Calculer Exprimer en fonction de

*Réponse*

Puisque alors on peut donc écrire :

Nous allons considérer que est une transformation affine de la variable aléatoire .

Nous pouvons donc utiliser les propriétés :

Si alors on a :

On a déjà calculé que

donc :

b)

On a déjà calculé que

donc :

## Définition d'un échantillon d'une loi de probabilité

On appelle **échantillon** de taille d’une loi de probabilité toute **liste** de variables aléatoires indépendantes qui suivent toute cette loi de probabilité.

La somme de l'échantillon est une autre variable aléatoire .

La moyenne de l'échantillon est encore une autre variable aléatoire

***Remarque***

Dans un échantillon d'une loi de probabilité, toutes les variables aléatoires de la liste ont les mêmes espérances, variance et écart-type.

Par exemple, si on prend la première des variables aléatoires de l'échantillon de la loi de probabilité, on a :

***Exemple :*** Une roue de loterie comporte cinq secteurs angulaires égaux. Les deux premiers secteurs valent points, le troisième vaut points et les deux derniers valent points.

On fait tourner la roue quatre fois de suite et on gagne la somme des points cumulés sur les quatre lancers de la roue.

1. Décomposer en une somme de variables aléatoires identiques et indépendantes dont on donnera la loi.
2. Calculer au centième près.
3. On pose la moyenne empirique[[1]](#footnote-1) de l'échantillon. Déterminer au centième près l'espérance et la variance de .

*Réponse*

où chaque variable aléatoire donne le nombre de points au i -ème lancer.

Les sont indépendantes car associées à des épreuves indépendantes.

La loi suivie par ces variables est :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | TOTAL |
|  |  |  |  |  |

1. On commence par calculer l'espérance et la variance d'une des variables aléatoires, par exemple .

et comme

alors

et comme

alors

1. La moyenne empirique de l'échantillon est

L'espérance de la moyenne empirique est -20 points.

La variance de la moyenne empirique est 25400.

# Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

## Inégalité de Bienaymé-Tchebychev sur un exemple

*L’inégalité de Bienaymé-Tchebychev* est un outil pour *étudier la dispersion* de la variable aléatoire autour de son espérance mathématique .

**Irénée-Jules Bienaymé** (1796-1878) est un mathématicien français qui a énoncé cette inégalité en 1853. **Pafnouti Tchebychev** (1821-1894) est un mathématicien russe qui l’a démontrée en 1867.

***Exemple***

On considère la variable aléatoire donnant le gain en euros à un jeu de grattage dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 2 | 4 | 6 | 10 | 20 | 100 | 1000 | 25000 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

1. Déterminer

Pour la suite on prendra la valeur de arrondie à .

*Réponse*

 €

1. Déterminer les probabilités suivantes :

*Réponse*

La valeur absolue de la différence de deux nombres et est notée .

Elle est toujours positive et représente la distance entre les deux nombres.

Exemples :

 est la distance entre 10 et 12.

 est aussi la distance entre 10 et 12.

* 1. Donc la première probabilité à calculer est la probabilité pour que la valeur de ait une distance par rapport à supérieure ou égale à

Or les valeurs possibles sont .

Si on résume les distances dans un tableau on obtient :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 2 | 4 | 6 | 10 | 20 | 100 | 1000 | 25000 |
|  | 1,423 | 0,577 | 2,577 | 4,577 | 8,577 | **18,577** | **98,577** | **998,58** | **24999** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Seulement quatre valeurs vérifient la condition "distance supérieure ou égale à 15", totalisant les probabilités soit un total de .

Conclusion :

La probabilité que le gain au grattage s'écarte de plus de par rapport à l'espérance est de soit dans des cas.

* 1. La deuxième probabilité à calculer est la probabilité pour que la valeur de ait une distance par rapport à supérieure ou égale à

Or les valeurs possibles sont .

Si on résume les distances dans un tableau on obtient :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 2 | 4 | 6 | 10 | 20 | 100 | 1000 | 25000 |
|  | 1,423 | 0,577 | 2,577 | 4,577 | 8,577 | 18,577 | 98,577 | 998,58 | **24999** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Seule une valeur vérifie la condition "distance supérieure ou égale à 10000", correspondant à la probabilité .

Conclusion :

La probabilité que le gain au grattage s'écarte de plus de par rapport à l'espérance est de soit dans 0,7 millionième des cas.

1. Soit un réel *strictement positif*.

Que semble-t-on pouvoir dire de la probabilité quand devient grand ?

*Réponse*

Si on résume les deux résultats de la question précédente :

|  |  |
| --- | --- |
| Valeur de  | Valeur de |
|  |  |
|  |  |

Il semble que **lorsque devient grand**, la **probabilité** pour que s'écarte de plus de par rapport à l'espérance **tende vers** .

1. Calculer Pour la suite on prendra la valeur de arrondie à l’entier.

*Réponse*

1. Calculer pour et pour .

*Réponse*

* Pour :
* Pour :
1. Comparer et dans ces deux cas.

*Réponse*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | Comparaison |
| 1er cas |  |  |  | **est inférieure** à |
| 2e cas |  |  |  | **est inférieure** à |

1. Quelle conjecture peut-on faire sur la comparaison de avec ?

*Réponse*

En se basant sur les deux cas (t = 15 et t = 10000) on conjecture que, quel que soit le réel ,

## Formule de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit une variable aléatoire d’espérance et de variance

Pour tout réel strictement positif , on a :

Ceci est *l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*

Quand on connait la variance d'une variable aléatoire , alors on a un *majorant* de la probabilité . Ce majorant est .

***Remarques***

 **équivaut** successivement à :

\* La distance entre et son espérance est supérieure ou égale à



\* *X* est dans la zone rouge



\* *X* n'est pas dans la zone verte

* Il ressort de cela que est **l'évènement contraire** de

et donc en utilisant la probabilité de l'évènement contraire :

***Conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :***

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit :

On dit que est un **intervalle de fluctuation de centré sur son espérance.**

Cette inégalité permet de *minorer* la probabilité que appartienne à cet intervalle de fluctuation.

## Exemple d'utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Dans une usine, la variable aléatoire donnant la largeur en millimètres d’une puce électronique prise au hasard a pour espérance et pour variance .

Si la largeur d’une puce n’appartient pas à alors la puce n’est pas commercialisable. A l’aide de l’inégalité de Bienaymé-Tchebychev répondre aux questions suivantes :

* 1. Montrer que la probabilité que la puce n'est pas commercialisable est inférieure ou égale à 0,01.

*Réponse* : La puce n'est pas commercialisable lorsque

 équivaut à

La puce n'est pas commercialisable lorsque la distance entre et est supérieure ou égale à .

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne une majoration de la probabilité de .

Ici et , donc :

Remarque: Cela peut aussi s'écrire

Conclusion : La probabilité que la puce ne soit pas commercialisable est inférieure ou égale à .

* 1. Majorer la probabilité que la largeur de la puce soit supérieure ou égale à 13 mm.

*Réponse :* L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev a permis dans la question a) de montrer que la probabilité que la valeur de se trouve dans est inférieure ou égale à .

Donc la probabilité que la valeur de se trouve dans est aussi inférieure ou égale à .

D'où la majoration : .

## Cas de la loi binomiale

***Exemple :***  suit la loi binomiale

1. Donner la majoration donnée par l’inégalité de Bienaymé-Tchebychev de la probabilité :
2. Calculer cette même probabilité avec la calculatrice.
3. Que penser de la majoration donnée par l’inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

*Réponse*

1. Énoncé de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Dans cet exercice on a , donc l'inégalité s'écrit :

* Application numérique au cas où suit la loi binomiale

, ,

On sait que si suit une loi binomiale, alors et .

Donc

et ; déduit que donc

Donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que

1. On fait le calcul exact à la calculatrice. Pour mieux se rendre compte, on peut tracer sur la calculatrice la représentation graphique des probabilités de la loi binomiale

Voici la procédure détaillée sur la TI-83 :

stats 4:EffListe 2nd 1 pour avoir L1 la touche , (au-dessus du "7"), 2nd 2 pour avoir L2 entrer

stats 1:Modifier entrer

* Remplissage de la liste L1 avec les valeurs

Sélectionner **le titre** de la liste L1 et appuyer sur entrer

Sous le tableau, le curseur clignote à côté de L1=

La loi binomiale ici a pour paramètre donc les valeurs de la variable aléatoire discrète peuvent aller de 0 à 20. Pour entrer rapidement le liste des entiers de 0 à 20, procéder ainsi :

2nd listes choisir le menu OP

Sélectionner 5:suite

Expr:X

Variable:X

début:0

fin:20

pas:1

Sélectionner Coller et appuyer sur entrer

Appuyer encore sur entrer. La liste L1 se remplit des entiers de 0 à 20

* Remplissage de la liste L2 avec les valeurs

Sélectionner **le titre** de la liste L2 et appuyer sur entrer

Sous le tableau, le curseur clignote à côté de L2=

2nd distrib choisir la distribution **binomFdp(** et appuyer sur entrer

nbreEssais:20

p:0.45

valeur de x: 2nd 1 (pour sélectionner la liste L1)

Sélectionner Coller et appuyer sur entrer

Appuyer encore sur entrer. La liste L2 se remplit des probabilités que prenne telle ou telle valeur entière entre 0 et 20 incluses, selon la loi binomiale

* Visualisation de la distribution

Appuyer sur la touche f(x) et désactiver les représentations de fonctions Y1, Y2 etc. qui seraient éventuellement actives.

(Pour les désactiver, il faut sélectionner les signes " = " qui sont sur fond noir et appuyer sur la touche entrer. Le fond noir disparait ce qui signifie que la représentation graphique de cette fonction est désactivée).

Appuyer sur 2nd graph stats

Se placer sur 1:Graph1 … NAff et appuyer sur entrer

* + Sélectionner **Aff** et appuyer sur entrer pour permettre d'afficher le graphique statistique n°1
	+ Type : sélectionner la première option (des points)
	+ Xliste :L1 (si elle n'est pas déjà présente il faut faire 2nd 1 entrer )
	+ Yliste :L2 (si elle n'est pas déjà présente il faut faire 2nd 2 entrer )
	+ Marque : la troisième sorte (des gros points) entrer
	+ Couleur: à vous de choisir avec les flèches de direction gauche et droite.

Appuyer sur la touche fenêtre

Puisque les vont de 0 à 20, choisissez Xmin=0, Xmax=20, Xgrad=1

Puisque les sont entre 0 et 1, mais que probablement qu'aucun ne sera supérieur à 0.2, choisissez Ymin=0, Ymax=0.2, Ygrad=0.05

Appuyez sur la touche graphe



**Ici, la distance entre et son espérance est supérieure où égale à**

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirme que la probabilité que prenne l'une des valeurs dans la zone rouge sur l'écran de la calculatrice (c’est-à-dire ou ) est majorée par . On va calculer .

Calcul exact avec la loi binomiale sur la calculatrice :

* Pour calculer , on utilise :

2nd distrib choisir la distribution **binomFRép(** et appuyer sur entrer

nbreEssais:20

p:0.45

valeur de x:4

Sélectionner Coller et appuyer sur entrer

On voit sur l'écran binomFRép(20,0.45,4)

appuyer sur entrer . On trouve **0,01886** environ.

On stocke ce résultat dans la mémoire A. Appuyer sur sto→ alpha A entrer

Le cumul des probabilités est de l'ordre de 0,019.

* Pour calculer , on utilise

1 - binomFRép(20,0.45,13) donne environ **0,02141**

On stocke ce résultat dans la mémoire B. Appuyer sur sto→ alpha B entrer

Enfin, on additionne pour trouver .

alpha A + alpha B donne environ **0,040**

Donc on peut dire qu'en faisant le calcul avec la loi binomiale, on obtient une probabilité **inférieure à 0,041**

1. Ce qu'on peut penser de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Elle garantissait que est **inférieure à 0,25**. Le calcul exact montre que c'est bien le cas puisque 0,041 < 0,25. **Cependant on voit que la majoration par 0,25 est très imprécise.**

Remarque : Le caractère universel de l’inégalité de Bienaymé-Tchebychev a pour contrepartie le fait qu’elle est loin d’être optimale.

# Inégalité de concentration de la moyenne empirique

On considère une expérience aléatoire et est la variable aléatoire associée à cette expérience, d’espérance et de variance **On répète fois cette expérience** **de manière indépendante**. On obtient un échantillon de variables aléatoires .

Les variables suivent la même loi de probabilité. On note leur espérance et leur variance.

 est la variable aléatoire "moyenne empirique" de cet échantillon de taille .

Pour tout réel strictement positif , on a :

L’inégalité de concentration est un outil pour étudier la dispersion de la moyenne empirique d’un échantillon autour de l’espérance mathématique

***Exemple 1***

100 personnes jouent indépendamment à un même jeu dont la variable associée au gain (en euros) a pour espérance 10 et pour variance 2.

1. Donner une majoration de la probabilité que la *moyenne* des gains de ces 100 personnes soit à une distance supérieure ou égale à par rapport à .
2. Donner une minoration de la probabilité que la *moyenne* des gains de ces 100 personnes soit comprise strictement entre 7 € et 13 €.

*Réponse*

1. Notons le gain moyen par personne dans le groupe de 100 joueurs. Les personnes jouent de **manière indépendante**. Donc on peut utiliser l'inégalité de concentration de la moyenne qui donne la majoration de probabilité suivante :

avec

Conclusion :

La probabilité que la *moyenne empirique* des gains de ces 100 personnes soit à une distance supérieure ou égale à par rapport à , c’est-à-dire dans les intervalles est majorée par .

1. "La *moyenne*  des gains de ces 100 personnes est comprise strictement entre 7 € et 13 € " est l'évènement contraire de " la *moyenne*  est dans les intervalles ".

Puisque la probabilité que se trouve dans est plus petite que alors on en déduit que la probabilité que se trouve dans est plus grande que

ce qui équivaut à

***Exemple 2 Utiliser l’inégalité de concentration pour trouver la taille d’un échantillon***

Une urne contient deux jetons sur lesquels figure le nombre 3, deux jetons sur lesquels figure le nombre 5 et un jeton sur lequel figure le nombre 10.

On tire un jeton dans cette urne et on considère la variable aléatoire donnant le nombre obtenu.

1. Déterminer et
2. Calculer le nombre de tirages avec remise qu'il faut effectuer dans cette urne pour être sûr au risque de 5 % (ou au seuil de 95 %) que la moyenne des nombres obtenus soit comprise entre 5 et 5,4 exclus.

*Réponse*

1. On commence par écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire qui donne la valeur du nombre tiré de l'urne.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | TOTAL |
|  |  |  |  |  |

Calculer l'espérance la variance

1. Les tirages se font de **manière indépendante puisqu'ils sont avec remise**. Donc on peut utiliser l'inégalité de concentration de la moyenne qui donne la majoration suivante :

avec

La probabilité que la *moyenne*  des nombres de ces tirages soit à une distance supérieure ou égale à par rapport à , c’est-à-dire dans les intervalles est majorée par .

* "La *moyenne*  des nombres de ces tirages est comprise strictement entre 5 et 5,4 " est l'évènement contraire de " la *moyenne*  est dans les intervalles ".

Puisque la probabilité que se trouve dans est plus petite que alors on en déduit que la probabilité que se trouve dans est plus grande que

Ceci peut aussi s'écrire :

La probabilité que la moyenne des nombres tirés soit strictement entre et est supérieure ou égale à .

On cherche pour que la probabilité soit égale à

Donc on résout l'équation :

Conclusion :

En effectuant de tirages avec remise, on est sûr au risque de 5 % (ou au seuil de 95 %) que la moyenne des nombres obtenus soit comprise entre 5 et 5,4 exclus.

# Loi des grands nombres

Soit un échantillon de variables aléatoires d’espérance et la la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

D'après l'inégalité de concentration, on a :

Or,

donc, comme une probabilité est toujours positive :

En utilisant l'évènement contraire, on peut écrire de façon équivalente :

La loi des grands nombres peut s'énoncer ainsi :

La moyenne empirique , calculée sur les valeurs d'un échantillon de variables aléatoires identiques , converge vers l'espérance lorsque la taille de l'échantillon tend vers .

, pour assez grand, permet d'estimer l'espérance de .

***Exemple***

On considère un échantillon de variables aléatoires d’espérance

On considère

la variable aléatoire moyenne de l’échantillon pour entier entre et . On donne ci-contre le nuage de points

Estimer

*Réponse*

On observe que les ordonnées des points tendent vers lorsque devient grand.

Donc, **d'après la loi des grands nombres**, on estime que

1. **Empirique** : Qui se base uniquement sur les observations. [↑](#footnote-ref-1)