N° 201809 Amérique du Nord 2018 Exercice 2

1. Puisque la fonction f est dérivable, et que l'on connaît sa fonction dérivée, on va étudier le signe de la fonction dérivée pour connaître les variations de la fonction f.

Soit x dans $[0\,;\,1[$. On a $x < 1$ et donc, $0 < 1 - x$.
Le dénominateur de $f'(x)$ étant strictement positif, le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur, qui est une quantité affine, de coefficient directeur $-b$ négatif (puisque b est supérieur à 2) et donc on aura bien une fonction dérivée d'abord positive, pour $x \leqslant \dfrac{b-2}{b}$, puis négative.

On remarque le nombre $\dfrac{b-2}{b} = 1 - \dfrac{2}{b}$ est un nombre inférieur à 1 et positif, car b est un réel positif, supérieur à 2.

On peut donc affirmer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{b-2}{b}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{b-2}{b}\,;\,1\right[$.

Ces variations indiquent que f atteint un maximum pour $x = \dfrac{b-2}{b} = 1 - \dfrac{2}{b}$.

Ce maximum est donc $f\left(1-\dfrac{2}{b}\right) = b \times \left(1-\dfrac{2}{b}\right) + 2\ln\left(1-\left(1-\dfrac{2}{b}\right)\right) = b - 2 + 2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.

Le maximum de la fonction f s'établit bien à $b - 2 + 2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.

2. Si on essaye de résoudre l'inéquation $b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right) \leqslant 1,6$, on se retrouve devant une équation que l'on ne sait pas résoudre de façon exacte.

On peut donc procéder à tâtons, par exploration à la calculatrice pour donner une réponse.

La méthode la plus complète serait la suivante :

Posons m la fonction définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par $m(b) = b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right) = b-2+\ln(4)-2\ln(b)$.

La fonction m est dérivable sur son ensemble de définition et on a pour tout b supérieur à 2 : $m'(b) = 1-\dfrac{2}{b}$.

Comme b est supérieur à 2, on en déduit que $m'(b)$ est positif, et même strictement positif pour $b > 2$, et donc que la fonction m est strictement croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

$m(2) = 2-2+\ln 1 = 0$.

S'il y a un réel b_0 tel que $f(b_0) = 1,6$, on pourra donc dire que $2 \leqslant b \leqslant b_0 \iff 0 \leqslant m(b) \leqslant 1,6$.

Par exploration à la calculatrice, on constate (par exemple) que $m(10) \approx 4,8$.

La fonction m étant continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;\,10]$ et 1,6 étant une valeur intermédiaire entre $m(0) = 0$ et $m(10) \approx 4,8$, le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe un unique nombre b_0 antécédent de 1,6 par m sur $[2\,;\,10]$. Comme m est strictement croissante sur $[2\,;\,+\infty[$, il n'y aura pas d'autre antécédent que celui là.

Un balayage à la calculatrice donne $5,69 < b_0 < 5,70$.

Les valeurs du paramètre b garantissant une hauteur maximale $m(b)$ ne dépassant pas 1,6 mètre sont donc les réels de l'intervalle $[2\,;\,b_0]$, soit, en donnant une valeur approchée (nécessairement par défaut, vu que m est croissante) de l'intervalle $[2\,;\,5,69]$.

3. Si on choisit $b = 5,69$, alors, cela signifie que la tangente tracée en pointillés est la droite d'équation : $y = f'(0)\times(x-0)+f(0) = \dfrac{b-2}{1-0}\times x+0 = (5,69-2)x = 3,69x$.

Cela signifie que l'origine du repère, le point de coordonnée $(1\,;\,0)$ et le point de coordonnées $(1\,;\,3,69)$ forment un triangle rectangle, dans lequel le côté opposé à l'angle θ mesure 3,69 et le côté adjacent mesure 1, donc la tangente de l'angle est donnée par $\tan\theta = \dfrac{3,69}{1} = 3,69$.

À la calculatrice (réglée en mode degrés), on obtient $\theta = \arctan(3,69) \approx 74,8°$