

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel.

Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.

À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0; 20]$ par : $f(t) = (0,8t + 0,2)e^{-0,5t} + 0,03$.

On donne ci-contre le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$.

Ainsi, la valeur $f(0) = 0,23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

t	0	1,75	20
$f'(t)$	+	0	-
f	0,23		

1. a. On trouve à la calculatrice que $f(20) \approx 0,031$.
 b. Le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience est $f(1,75) \approx 0,697$ ce qui correspond à 69,7 %.
2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %, c'est-à-dire 0,035.
 - a. On complète le tableau des variations de f en plaçant la valeur 0,035 :

t	0	1,75	T	20
f	0,23	$\approx 0,687$	0,035	$\approx 0,031$

D'après ce tableau, il n'existe qu'un instant T pour lequel $V = 0,035$.

De plus, $V \leq 0,035$ pour tout t de l'intervalle $[T; 20]$.

- b. On considère l'algorithme suivant :

$t \leftarrow 1,75$
$p \leftarrow 0,1$
$V \leftarrow 0,7$
Tant que $V > 0,035$
$t \leftarrow t + p$
$V \leftarrow (0,8t + 0,2)e^{-0,5t} + 0,03$
Fin Tant que

Par approximations successives, on trouve $f(15,65) \approx 0,0351 > 0,035$ et $f(15,75) \approx 0,0349 < 0,035$; donc la valeur de t en sortie d'algorithme est 15,75.

15,75 est une valeur approchée du temps exprimé en minutes à partir duquel le taux de CO_2 sera inférieur à 3,5%; ce temps est donc de 15 minutes et 45 secondes.

3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.

- a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 11]$ par : $F(t) = (-1,6t - 3,6)e^{-0,5t} + 0,03t$.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0 ; 11]$ et

$$\begin{aligned} F'(t) &= (-1,6) \times e^{-0,5t} + (-1,6t - 3,6) \times (-0,5)e^{-0,5t} + 0,03 = (-1,6 + 0,8t + 1,8)e^{-0,5t} + 0,03 \\ &= (0,8t + 0,2)e^{-0,5t} + 0,03 = f(t). \end{aligned}$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0 ; 11]$.

- b. La valeur moyenne V_m de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 11]$ est

$$\frac{1}{11-0} \int_0^{11} f(t) dt = \frac{1}{11} [F(11) - F(0)] = \frac{1}{11} [((-17,6 - 3,6)e^{-5,5} + 0,33) - (-3,6)] \approx 0,349.$$

Le taux moyen de CO_2 pendant les 11 premières minutes est d'environ 34,9 %.