N°7600 : Bac S 2013 métropole - Exercice 3 - Etude d'une suite

Tester l'exercice

Soit (u_n) la suite définie par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = -\frac{9}{2} - 3n + \frac{1}{3}u_n \end{cases}$$

Calculer u_1. On utilise la définition de la suite avec $n=0$

$u_{0+1} = -\frac{9}{2} - 3(0) + \frac{1}{3}u_0$ $\quad u_1 = -\frac{9}{2} + \frac{1}{3} \times -1$ $\quad u_1 = -\frac{9}{2} - \frac{1}{3}$ $\quad u_1 = -\frac{29}{6} \approx -4{,}8$

Valider ✔

Calculer u_2. On utilise la définition de la suite avec $n=1$

$u_{1+1} = -\frac{9}{2} - 3(1) + \frac{1}{3}u_1$ $\quad u_2 = -\frac{9}{2} - 3 + \frac{1}{3} \times -\frac{29}{6}$ $\quad u_2 = -\frac{82}{9} \approx -9{,}1$

Valider ✔

Calculer u_3. On peut, pour aller plus vite programmer la suite sur la calculatrice. Dans le cas où la calculatrice ne peut accepter que les formules de suites $u(n) =$ on adapte la définition $u_{n+1} = -\frac{9}{2} - 3n + \frac{1}{3}u_n$

Valider ✔

On remplace, partout où on voit "n" par "n-1". C'est possible car n est un entier naturel quelconque et n-1 est aussi un entier naturel.

Calculer u_4.

$$\begin{cases} n\text{Min} = 0 \\ u(n) = -9/2 - 3(n-1) + (1/3) * u(n-1) \\ u(n\text{Min}) = -1 \end{cases}$$

Valider ✔

Puis on calcule $u(1) = \underline{-29/6}$

$u(2) = -\frac{82}{9}$ $\quad u(3) = \frac{-731}{54}$ $\quad u(4) = \frac{-1459}{81}$

(utiliser $\boxed{\text{math}}$ MATH ▶ Frac pour avoir la fraction exacte)

On peut conjecturer que cette suite est:

○ **ni croissante ni décroissante.**

○ **croissante.**

☒ **décroissante.**

n	$u(n)$
0	-1
1	-4,8
2	-9,1
3	-13,5
4	-18,0

Valider ✔

Calculer $u_{n+1} - u_n$

$-\frac{9}{2} - 3n + \frac{1}{3}u_n - u_n = \underline{-\frac{9}{2} - 3n - \frac{2}{3}u_n}$

Valider ✔

On définit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$v_n = u_n + \frac{9}{2}n$$

Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n

$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{9}{2}(n+1)$ Or $u_{n+1} = -\frac{9}{2} - 3n + \frac{1}{3}u_n$

Valider ✔

donc $v_{n+1} = -\cancel{\frac{9}{2}} - 3n + \frac{1}{3}u_n + \frac{9}{2}n + \cancel{\frac{9}{2}}$

$v_{n+1} = \frac{3}{2}n + \frac{1}{3}u_n$ Or $u_n = v_n - \frac{9}{2}n$ donc $v_{n+1} = \frac{3}{2}n + \frac{1}{3}v_n - \frac{3}{2}n$

$\underline{v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n}$

Exprimer v_n uniquement en fonction de n.

D'après la précédente relation, la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = u_0 + \frac{9}{2}(0) = -1$ et de raison $q = \frac{1}{3}$

Valider ✔

D'après la formule $v_n = v_0 \times q^n$ on a $\underline{v_n = -1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

Exprimer u_n uniquement en fonction de n.

Comme $u_n = v_n - \frac{9}{2}n$, en remplaçant v_n on a $\underline{u_n = -1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{9}{2}n}$

Valider ✔

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

$$T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

Exprimer S_n en fonction de n. Comme $u_n = v_n - \frac{9}{2}n$, on a :

$S_n = \left(v_0 - \frac{9}{2}(0)\right) + \left(v_1 - \frac{9}{2}(1)\right) + \cdots + \left(v_n - \frac{9}{2}(n)\right)$

Valider ✔

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n - \frac{9}{2}(0) - \frac{9}{2}(1) - \cdots - \frac{9}{2}(n)$

$S_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - 1/3} - \frac{9}{2}(0 + 1 + 2 + \cdots + n)$ $S_n = -1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} - \frac{9}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$

$\underline{S_n = -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) - \frac{9}{4}n(n+1)}$

Déterminer la limite de la suite (T_n).

$T_n = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{n^2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) - \frac{9}{4} \times \frac{n^2+n}{n^2}$

Valider ✔

$-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \end{array}\right\}$ donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = 0$

donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{3}{2} \times \frac{1}{n^2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = 0$

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$ d'où $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = -\frac{9}{4}}$