N°16024

Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{-4x - 4}{4x + \cos(2x) + 1}$$

Déterminer le plus petit encadrement de la fonction f, ne contenant plus de fonction trigonométrique, pour x suffisamment petit (on écrira cet encadrement sous la forme $\ldots < f(x) \leq \ldots$) ⚠ Forme de la réponse attendue

$\leq f(x) \leq$

Valider ✔

En déduire

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-4x - 4}{4x + \cos(2x) + 1}$$

"Pour x suffisamment petit" signifie "x tend vers $-\infty$".
On commence par encadrer la fonction trigonométrique entre -1 et 1 :

$$-1 \leq \cos(2x) \leq 1$$

$$4x+1-1 \leq 4x+1+\cos(2x) \leq 4x+1+1$$

$$4x \leq 4x+1+\cos(2x) \leq 4x+2$$

$$\frac{1}{4x} \geqslant \frac{1}{4x+1+\cos(2x)} \geqslant \frac{1}{4x+2}$$ car la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$

x tend vers $-\infty$ donc $-4x-4$ est positif
Donc en multipliant les 3 membres par ce nombre positif on conserve le sens des inégalités :

$$\frac{-4x-4}{4x} \geqslant \frac{-4x-4}{4x+1+\cos(2x)} \geqslant \frac{-4x-4}{4x+2}$$

En remettant le plus petit nombre en premier :

$$\frac{-4x-4}{4x+2} \leq \frac{-4x-4}{4x+1+\cos(2x)} \leq \frac{-4x-4}{4x}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-4x-4}{4x+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-4x}{4x} = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-4x-4}{4x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-4x}{4x} = -1$

Donc, d'après le théorème d'encadrement (ou des gendarmes), $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$