N°16029

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \frac{9x+4}{-\sin(2x-8)+4}$$

Déterminer la majoration la plus précise de la fonction f pour x suffisamment petit ne contenant plus de fonction trigonométrique. (on écrira la majoration sous la forme $f(x) \leq \ldots$) ⚠ Forme de la réponse attendue

$$f(x) \leq \frac{9x+4}{5}$$

Valider ✔

En déduire

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{9x+4}{-\sin(2x-8)+4}$$

"pour x suffisamment petit" signifie "x tend vers $-\infty$"

On commence par encadrer la fonction trigonométrique entre -1 et 1 :

$$-1 \leq \sin(2x-8) \leq 1$$

$$1 \geq -\sin(2x-8) \geq -1 \quad \text{(multiplier par le nombre négatif } -1 \text{ change l'ordre)}$$

$$5 \geq -\sin(2x-8)+4 \geq 3$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{-\sin(2x-8)+4} \leq \frac{1}{3} \quad \text{(la fonction inverse est décroissante sur }]0\,;+\infty[\text{)}$$

Et puisque x tend vers $-\infty$, $9x+4 < 0$

donc

$$\frac{9x+4}{5} \geq \frac{9x+4}{-\sin(2x-8)+4} \geq \frac{9x+4}{3} \quad \text{(multiplier par le nombre négatif } 9x+4 \text{ change l'ordre).}$$

En remettant le plus petit nombre en premier :

$$\frac{9x+4}{3} \leq \frac{9x+4}{-\sin(2x-8)+4} \leq \frac{9x+4}{5}$$ Donc $\boxed{\frac{9x+4}{5}}$

Déduire $\lim_{x \to -\infty}$: On utilise le théorème de comparaison :

$\lim_{x \to -\infty} \frac{9x+4}{5} = -\infty$ donc $\lim_{x \to -\infty} \frac{9x+4}{-\sin(2x-8)+4} = \boxed{-\infty}$