Limites d'une fonction rationnelle aux bornes de son ensemble de définition

# Pourquoi étudier la limite de f(x) ?

Voir en même temps la vidéo d'Yvan Monka sur <https://www.youtube.com/watch?v=YPwJyYDsmxM&t=0s>

Remarque : les notations d'Yvan Monka sont différentes, mais cela ne change pas le sens :

* Il note un réel aussi grand que l'on veut. Ici ce sera .
* Pour les limites en un réel, il note une valeur vers laquelle tend . Ici ce sera .

On considère la fonction définie sur par :

* Si on calcule pour des valeurs de de plus en plus proches de (tout en restant strictement inférieures à 5) on obtient des valeurs de aussi grandes que l'on veut.



On dit que la limite de est égale à lorsque tend vers .

On note cela :

* Si on calcule pour des valeurs de de plus en plus grandes dans les valeurs positives on obtient des valeurs de aussi proches de que l'on veut.



On dit que la limite de est égale à lorsque tend vers .

On note cela :

# Limite infinie à l'infini

Intuitivement : on dit que la fonction admet pour limite en si est aussi grand que l'on veut pourvu que soit suffisamment grand. On note cela :

Exemple :

* De façon plus rigoureuse : on dit que la fonction admet comme limite lorsque tend vers si tout intervalle du type où est un réel (aussi grand que l'on veut), contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment grand. On écrit .



On a de même :

* On dit que la fonction admet comme limite lorsque tend vers si tout intervalle du type où est un réel (négatif, aussi grand que l'on veut en valeur absolue), contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment grand. On écrit .

Exemple :



# Limite finie à l'infini

Intuitivement :

On dit que la fonction admet pour limite en si est aussi *proche de L* que l'on veut pourvu que soit suffisamment grand. On note cela :

Exemple :



* De façon plus rigoureuse : on dit que la fonction admet comme limite lorsque tend vers si tout intervalle ouvert contenant le réel contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment grand. On écrit .

Conséquence graphique :

Si ou si alors la courbe de la fonction a comme *asymptote* parallèle à l'axe des abscisses la droite d'équation



 **Limite et sens de variation ne sont pas liés** : Une fonction peut être à la fois non croissante et avoir



 **Certaines fonctions n'ont pas de limite**



# Limite en un réel a

## Limite finie en un réel a

* Cas qui se présente la plupart du temps : la limite de la fonction lorsque tens vers est égale à par exemple :

## Limite infinie en un réel a

Intuitivement :

On dit que la fonction admet pour limite en si est aussi grand que l'on veut pourvu que soit suffisamment proche de . On note cela :



* De façon plus rigoureuse : on dit que la fonction admet comme limite lorsque tend vers si tout intervalle où est un réel (aussi grand que l'on veut), contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment proche de . On écrit .

On a de même :

* On dit que la fonction admet comme limite lorsque tend vers si tout intervalle du type où est un réel (négatif, aussi grand que l'on veut en valeur absolue), contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment proche de . On écrit .

Conséquence graphique :

Si ou si alors la courbe de la fonction a comme *asymptote* parallèle à l'axe des ordonnées la droite d'équation



# Limite à gauche, limite à droite de



Dans l'exemple ci-dessus,

Et on n'a pas la même limite quand tend vers par valeur inférieure ou quand tend vers par valeur supérieure.

Dans les deux cas la limite est infinie mais cela peut être ou selon le signe du dénominateur.

et

 **Application au n°54 p57 Livre Indice Bordas de Terminale S Edition 2012 :**



Puisque ces fonctions sont définies sur cela n'a pas de sens d'étudier :

On étudie seulement :

Le résultat dépend du signe du dénominateur.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Donc :

et donc par inverse :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Donc :

et donc par inverse :

Donc par quotient :

 **Application au n°69 p58 Livre Indice Bordas de Terminale S Edition 2012 :**





1. La fonction est définie à condition que

 . Il y a deux racines réelles et 1.

Donc l'ensemble de définition de la fonction est :

1. Il y a donc six bornes à l'ensemble de définition et six limites à étudier :
* Limite en :

Méthode 1 :

On lève la forme indéterminée en factorisant au numérateur et au dénominateur par la plus haute puissance de et on simplifie.

 est une forme indéterminée du type

On factorise au numérateur et au dénominateur par la plus haute puissance de

On simplifie :

On étudie la limite de chaque facteur :

Donc, par quotient et produit :

Méthode 2 :

En utilisant le théorème " La limite **quand x tend vers l'infini** d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des monômes de plus haut degré ".

Or

Donc, par inverse :

* Limite en :

La limite **quand x tend vers l'infini** d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des monômes de plus haut degré

Or

Donc, par inverse :

* Limite en

Le résultat dépend du signe du dénominateur :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Donc par quotient :

* Limite en

Donc par quotient :

* Limite en

Donc par quotient :

* Limite en

Donc par quotient :

1. Les asymptotes à la courbe se déduisent des limites précédentes :

Donc la courbe a une asymptote horizontale d'équation (c'est l'axe ).

Donc la courbe a une asymptote verticale d'équation .

Donc la courbe a une deuxième asymptote verticale d'équation .

On peut le vérifier sur la calculatrice :

