Limites d'une fonction composée

1 Un exemple

Voir en même temps la vidéo d'Yvan Monka sur

https://www.youtube.com/watch?v=DNU1M3Ii76k&list=PLVUDmbpupCarS4Qp45vTwsEGYMOJtgBxE&index=14&t=0s

On veut calculer la limite de $\sqrt{\frac{4x-1}{2x+3}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On pose :

$$g(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$$

On peut alors écrire que $\sqrt{\frac{4x-1}{2x+3}} = f(g(x))$ où f est la fonction racine carrée.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-1}{2x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(4-\frac{1}{x})}{x(2+\frac{3}{x})}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-1}{2x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4-\frac{1}{x} = 4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{3}{x} = 2$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-1}{2x+3} = 2$$

De plus :

$$\lim_{X\to2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$$

Donc, par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} c(x) = \sqrt{2}$$

Application au n°77 p59 Livre Indice Bordas de Terminale S Edition 2012 :

77 Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de chacune des fonctions f, g, h, k, m et p définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ **2.** $g(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$ **3.** $h(x) = \sqrt{\frac{3x^2+7}{x^2+1}}$

4. $k(x) = (5-x)^3$ **5.** $m(x) = (1-x-x^2)^2$ **6.** $p(x) = (3x-1)^3$

Ces six fonctions sont des fonctions composées :

1) La fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

- Limite en $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty$$

De plus :

$$\lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Donc, par composition :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

- Limite en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty$$

De plus :

$$\lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Donc, par composition :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2) La fonction définie par :

$$g(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}$$

- Limite en $-\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty$

Donc par inverse :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

De plus :

$$\lim_{X \to 0} \sqrt{X} = 0$$

Donc, par composition :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

- Limite en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty$

Donc par inverse :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

De plus :

$$\lim_{X \to 0} \sqrt{X} = 0$$

Donc, par composition :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

3) fonction définie par :

$$h(x) = \sqrt{\frac{3x^2 + 7}{x^2 + 1}}$$

- Limite en $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 7}{x^2 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2(3 + \frac{7}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 7}{x^2 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3 + \frac{7}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 3 + \frac{7}{x^2} = 3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$

D'où

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 7}{x^2 + 1} = 3$$

De plus :

$$\lim_{X \to 3} \sqrt{X} = \sqrt{3}$$

Donc, par composition :

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \sqrt{3}$$

- Limite en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+7}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(3+\frac{7}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+7}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{7}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$\lim_{x\to+\infty} 3+\frac{7}{x^2} = 3$ et $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+7}{x^2+1} = 3$$

De plus :

$$\lim_{X\to 3} \sqrt{X} = \sqrt{3}$$

Donc, par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \sqrt{3}$$

4) fonction définie par :

$$k(x) = (5-x)^3$$

- Limite en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} 5-x = +\infty$$

De plus :

$$\lim_{X\to+\infty} X^3 = +\infty$$

Donc, par composition :

$$\lim_{x\to-\infty} k(x) = +\infty$$

- Limite en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} 5-x = -\infty$$

De plus :

$$\lim_{X\to-\infty} X^3 = -\infty$$

Donc, par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = -\infty$$

5) fonction définie par :

$$m(x) = (1 - x - x^2)^2$$

- Limite en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - x - x^2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

et

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1\right) = -1$

Donc par produit :

$$\lim_{x \to -\infty} 1 - x - x^2 = -\infty$$

De plus :

$$\lim_{X \to -\infty} X^2 = +\infty$$

Donc, par composition :

$$\lim_{x \to -\infty} m(x) = +\infty$$

- Limite en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - x - x^2 = -\infty$$

De plus :

$$\lim_{X \to -\infty} X^2 = +\infty$$

Donc, par composition :

$$\lim_{x \to +\infty} m(x) = +\infty$$

6) fonction définie par :

$$p(x) = (3x - 1)^3$$

- Limite en $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} 3x - 1 = -\infty$$

De plus :

$$\lim_{X \to -\infty} X^3 = -\infty$$

Donc, par composition :

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$$

- Limite en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} 3x - 1 = +\infty$$

De plus :

$$\lim_{X \to +\infty} X^3 = +\infty$$

Donc, par composition :

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$$

**Application au n°78 p59 Livre Indice Bordas de Terminale S Edition 2012 :**

78 Déterminer la limite en 1 et en 3 de la fonction f définie sur $]1\,;3[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{(3-x)(x-1)}}$.

Puisque cette fonction est définies sur $]1\,;\,3[$

On étudie seulement :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x)$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x)$$

- Limite en 1^+

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} 3 - x = 2$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} x - 1 = 0^+$$

Donc par produit :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (3-x)(x-1) = 0^+$$

Donc par inverse :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{1}{(3-x)(x-1)} = +\infty$$

De plus :

$$\lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Donc, par composition :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} h(x) = +\infty$$

- Limite en 3^{-}

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} 3 - x = 0^{+}$$

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} x - 1 = 2$$

Donc par produit :

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} (3 - x)(x - 1) = 0^{+}$$

Donc par inverse :

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{1}{(3 - x)(x - 1)} = +\infty$$

De plus :

$$\lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Donc, par composition :

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} h(x) = +\infty$$