Théorème de comparaison

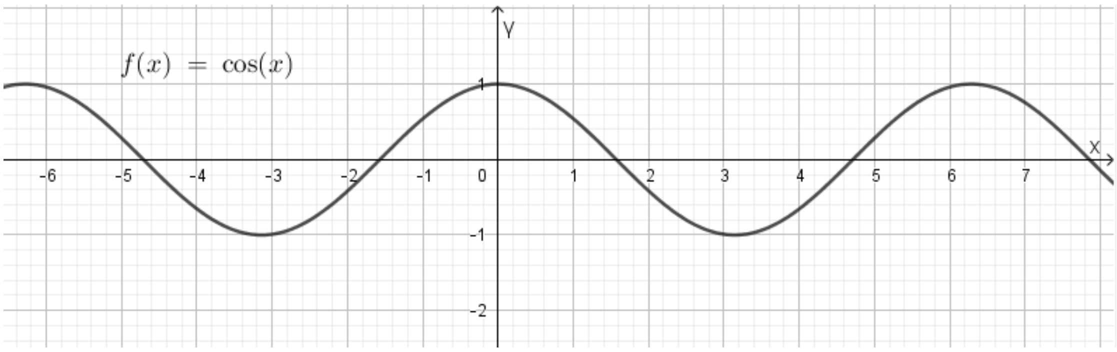
Voir en même temps la vidéo d'Yvan Monka sur
https://www.youtube.com/watch?v=Eo1jvPphja0&t=0s&index=16&list=PLVUDmbpupCarS4Qp45vTwsEGYMOJtgBxE

On considère la fonction définie sur par :

$$g(x) = \frac{x\cos x}{x^2+1}$$

On veut calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On ne peut pas utiliser les théorèmes sur les opérations et les limites car $\cos x$ n'a pas de limite.

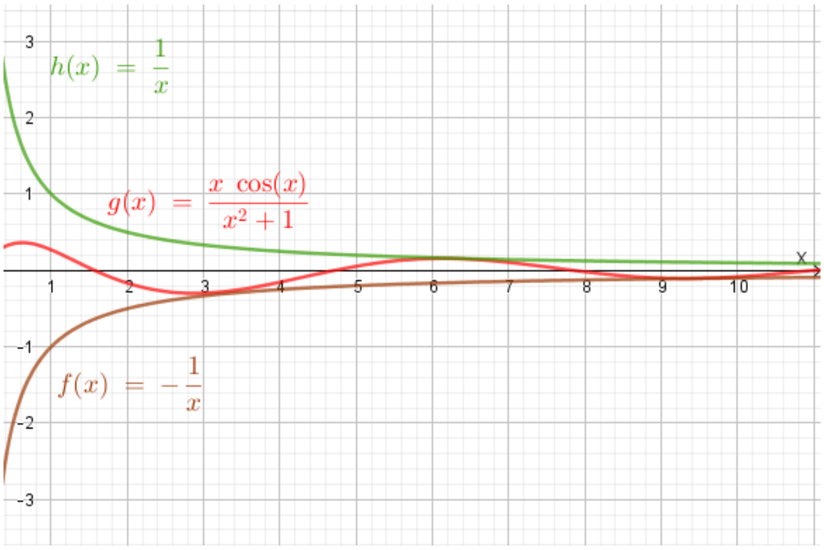


L'idée est d'encadrer $g(x)$ avec deux fonctions f et h qui ont une limite finie L lorsque x tend vers $+\infty$.

- Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$

alors, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$

Illustration :



Pour parvenir à encadrer une expression qui contient $\cos x$ on commence par écrire :

$$-1 \leq \cos x \leq 1\,, pour\ tout\ x \in \mathbb{R}$$

Si $x > 0$ alors

$$-x \leq x\cos x \leq x\,, pour\ tout\ x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{-x}{x^2+1} \leq \frac{x\cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$$

On pourrait s'arrêter là, mais pour aller plus vite dans le calcule des limites, on peut poursuivre :

$$-\frac{x}{x^2} \leq \frac{-x}{x^2+1} \leq \frac{x\cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2}$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{-x}{x^2+1} \leq \frac{x\cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x}$$

- D'où, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{x\cos x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x}$$

- De plus :

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

alors, d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1} = 0$$

Application au n°30 p55 Livre Indice Bordas de Terminale S Edition 2012 :

30 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x :

$$\frac{-1}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^2+1}.$$

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Limite en $+\infty$

- D'où, pour tout réel x, on a :

$$-\frac{1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$$

- De plus :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$$

Donc par inverse :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2+1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

alors, d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Limite en $-\infty$

- D'où, pour tout réel x, on a :

$$-\frac{1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$$

- De plus :

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty$$

Donc par inverse :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x^2+1} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

alors, d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$